

Marek Bartkowiak

Karty kontrolne obrazem zmienności procesu

Jednym z elementów zarządzania jakością oraz źródłem wiedzy o zmienności procesu są karty kontrolne. Ich twórcą był Walter A. Shewhart, którego intencją było przedstawienie informacji za pomocą nieskomplikowanych obliczeń i prostego wykresu.

W początkach ubiegłego wieku J. Spława-Neyman i E. Sharpe Pearson opracowali podstawy statystycznej konstrukcji weryfikowania hipotez, udoskonalone następnie przez samego Shewharta. Obecnie w literaturze rozróżnia się dwa główne podziały kart kontrolnych. Pierwszy typ kart stosowany jest w ocenie liczbowej lub atrybutowej. Drugi natomiast (karty sekwencyjne) służy do wychwytywania bardzo małych trendów i zmian w ustabilizowanym już procesie. Częstsze zastosowanie mają karty kontrolne pierwszego typu, gdyż ukazują stan procesu w wartościach liczbowych.

Głównym zadaniem kart kontrolnych jest uchwycenie wszelkiego rodzaju zmienności zachodzących w badanym procesie. Efektem zmienności w realizacji każdej działalności jest niejednorodność wytwarzanych dóbr. Zjawisko to powoduje, iż nie jest możliwe wyprodukowanie dwóch identycznych wyrobów, pomimo czynności mających na celu ujednoczenie tychże produktów, z powodu czynników przypadkowych lub wyznaczalnych (sporadycznych).

Jednymi z najczęściej stosowanych obecnie w przedsiębiorstwach są różnego rodzaju klasyczne karty kontrolne. W systemie Six Sigma obecnie zastosowanie mają karty kontrolne Shewharta, których konstrukcja opiera się na tym, że analizowana zmienna podlega rozkładowi normalnemu lub też zbliżonemu do niego.

Pomimo, iż w większości badanych procesów używa się klasycznych kart kontrolnych, istnieje odsetek danych w których nie można ich zastosować jako narzędzia sterowania lub kontroli. Alternatywą dla zaistniałej sytuacji są karty nowej generacji lub karty sekwencyjne, które wykazują się większą czułością na zmienność procesu.

Pierwszą z dużej rodziny kart Shewharta jest karta kontrolna pojedynczych obserwacji i ruchomego rozstępu I – MR (*Individual – Moving Range*). Jest ona jednym z podstawowych sposobów pozwalających określić stabilność procesu i stosuje się ją przy liczności próby wynoszącej $n = 1$. Karta ta bazuje na dwóch wykresach, z których pierwszy przedstawia pojedyncze obserwacje z próby, natomiast drugi ruchomy rozstęp. Kartę kontrolną I – MR oblicza się według wzorów od [1] do [8]. Ponadto w przedstawionej poniżej zależności [5] przyjmuje się, iż pierwszy punkt pomiarów nie jest zdefiniowany i nie umieszcza się go na wykresie.

Karta kontrolna pojedynczych obserwacji IX:

$$PP_{i_x} = x_i \quad [1]$$

$$CL_x = \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad [2]$$

$$UCL_x = \bar{x} + 2,66 \times \overline{MR} \quad [3]$$

$$LCL_x = \bar{x} - 2,66 \times \overline{MR} \quad [4]$$

Karta kontrolna ruchomego rozstępu *MR*:

$$PP_{i_{MR}} = MR_i = |x_i - x_{i-1}| \quad [5]$$

$$CL_{MR} = \overline{MR} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=2}^n MR_i \quad [6]$$

$$UCL_{MR} = 3,267 \times \overline{MR} \quad [7]$$

$$LCL_{MR} = 0 \quad [8]$$

gdzie poszczególne oznaczenia to:

- x_i – pojedynczy pomiar,
- \bar{x} – wartość średnia próby,
- n – liczność próby.

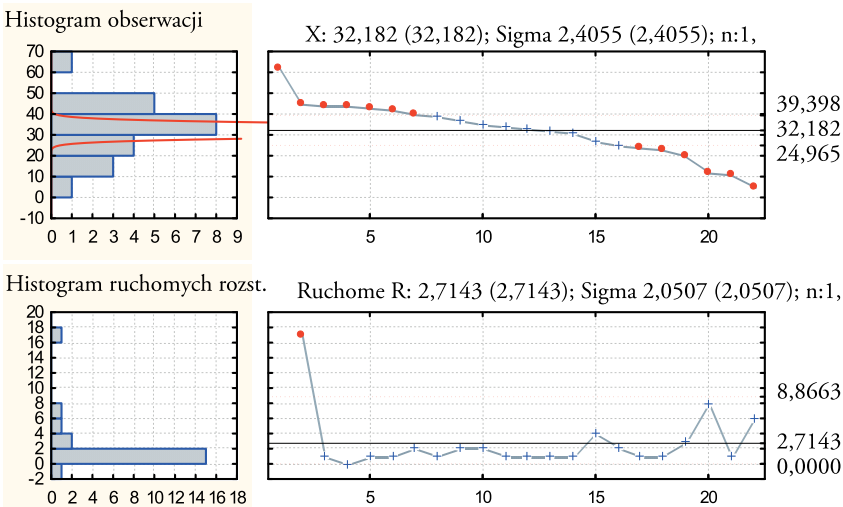
Na poniższym przykładzie przedstawionym na rysunku 1 ukazano za pomocą programu STATISTICA© dane GUS, dotyczące zasobów materiałowych uwzględniających bilans całego kraju w 2009 roku. Po lewej stronie kart kontrolnych znajdują się histogramy obserwacji oraz ruchomych rozstępów. Na karcie ła-

two zauważyć wysoką zmienność procesu utrzymywania tychże zasobów. Szczególnie widoczne jest to w początkowej oraz końcowej fazie pomiarów. Prawdopodobnie było to podyktowane różnym zapotrzebowaniem gospodarki narodowej na danego typu środki materiałowe. Elementem pogłębiającym był fakt, iż większość materiałów (od 80 do 100 proc.) było zgromadzonych w sektorze prywatnym, który charakteryzuje się dużą płynnością. Zgodnie z analizą GUS większość materiałów będących w rękach prywatnych była dostosowywana do rzeczywistych potrzeb i natychmiast zużywana. Rozpatrując jednak dane pod względem danego typu środka materiałowego w szerszym aspekcie czasu, zauważa się już znaczącą stabilność procesu magazynowania.

Kolejnym narzędziem kontrolującym zmienność procesu jest karta kontrolna średnich obserwacji i odchylenia standardowego $\bar{x} - s$. Wielkość materiału statystycznego w przypadku tej karty powinna być stosunkowo duża, i dlatego sugeruje się jej stosowanie przy liczności próby wynoszącej $n > 9$. Górny wykres stanowią średnie wartości z obserwacji, natomiast w dolnym umieszczone są wartości odchylenia standardowego. Punkty oraz granice oblicza się we-

Rysunek 1 Karta kontrolna I – MR, program STATISTICA© – przykład

Karta X i ruchomego R; zmienna: Zasoby materiałowe 2009



Zródło: opracowanie własne.

dług przedstawionych poniżej zależności od [9] do [16].

Karta kontrolna wartości średnich \bar{x} :

$$PP_{\bar{x}} = \bar{\bar{x}}_i = \frac{\sum_{i=1}^k x_i}{n} \quad [9]$$

$$CL_{\bar{x}} = \bar{\bar{x}} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \bar{x}_i \quad [10]$$

$$UCL_{\bar{x}} = \bar{\bar{x}} + A_3 \times \bar{s} \quad [11]$$

$$LCL_{\bar{x}} = \bar{\bar{x}} - A_3 \times \bar{s} \quad [12]$$

Karta kontrolna odchylenia standardowego s :

$$PP_{s_i} = s_i = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_i)^2} \quad [13]$$

$$CL_s = \bar{s} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k s_i \quad [14]$$

$$UCL_s = B_4 \times \bar{s} \quad [15]$$

$$LCL_s = B_3 \times \bar{s} \quad [16]$$

gdzie poszczególne oznaczenia to:

\bar{x} – wartość średnia próby,

$\bar{\bar{x}}$ – wartość średnia z wartości średnich w poszczególnych próbach,

A_3, B_3, B_4 – współczynniki statystyczne,

s_i – odchylenie standardowe w próbie,

\bar{s} – wartość średnia odchylenia standardowego w próbie,

k – liczba prób,

n – licznosc próby.

Następna w kolejności jest karta średnich obserwacji i rozstępu $\bar{x} - R$. Jest to stosunkowo łatwa do użycia metoda badania zmienności procesu, gdyż bazuje głównie na obliczeniu wartości średnich zgodnie z wzorami od [17] do [20] oraz rozstępu, przedstawionymi w zależnościach od [21] do [24]. Licznosc próby powinna mieścić się w przedziale $n = <2,9>$. Należy tu zauważyć, iż rozstęp nie jest tak miarodajny jak odchylenie standardowe, dlatego jeżeli istnieje taka możliwość to zaleca się stosowanie karty kontrolnej $\bar{x} - s$.

Karta kontrolna wartości średnich \bar{x} :

$$PP_{\bar{x}} = \bar{\bar{x}}_i = \frac{\sum_{i=1}^k x_i}{n} \quad [17]$$

$$CL_{\bar{x}} = \bar{\bar{x}} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \bar{x}_i \quad [18]$$

$$UCL_{\bar{x}} = \bar{\bar{x}} + A_2 \times \bar{R} \quad [19]$$

$$LCL_{\bar{x}} = \bar{\bar{x}} - A_2 \times \bar{R} \quad [20]$$

Karta kontrolna rozstępu R :

$$PP_{R_i} = R = x_{\max} - x_{\min} \quad [21]$$

$$CL_R = \bar{R} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k R \quad [22]$$

$$UCL_R = D_4 \times \bar{R} \quad [23]$$

$$LCL_R = D_3 \times \bar{R} \quad [24]$$

gdzie poszczególne oznaczenia to:

\bar{x} – wartość średnia próby,

$\bar{\bar{x}}$ – wartość średnia z wartości średnich w poszczególnych próbach,

\bar{R} – wartość średnia rozstępu,

A_2, D_3, D_4 – współczynniki statystyczne,

k – liczba prób,

n – licznosc próby.

Ostatnią wśród kart służących do oceny liczbowej jest karta mediany i rozstępu, najrzadziej stosowana z powodu małej dokładności wyników. Jej zaletą są nieskomplikowane obliczenia, które można zastosować bezpośrednio na stanowisku pracy. Stosuje się ją przy licznosci próby wynoszącej $n = 3,5$ lub 7 . Wzory [25] do [28] dotyczą zasad obliczania punktów oraz granic kontrolnych. Natomiast kartę rozstępu liczy się wzorami [21, 22, 23, 24].

$$PP_{i_{Me}} = Me = \frac{x_i + x_{i+1}}{2} \quad [25]$$

$$CL_{Me} = \bar{Me} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k Me \quad [26]$$

$$UCL_{Me} = \bar{Me} + A_4 \times \bar{R} \quad [27]$$

$$LCL_{Me} = \bar{Me} - A_4 \times \bar{R} \quad [28]$$

gdzie poszczególne oznaczenia to:

\bar{R} – wartość średnia rozstępu,

A_4 – współczynniki statystyczne,

k – liczba prób.

Karty atrybutowe

Odmianą, bo bazującą na ocenie alternatywnej, jest rodzina kart atrybutowych. Jej pierwszą przedstawicielką jest karta liczby jednostek niezgodnych *number proportion* – *np*. Opiera się ona na rozkładzie dwumianowym, zwanym też rozkładem Bernoulliego. Używana jest w sytuacjach, gdy chcemy kontrolować jakość ze względu na alternatywną ocenę właściwości. Kartę *np* stosowuje się w przypadku, gdy liczba elementów nie spełniających specyfikacji jest stosunkowo duża, dochodząc nawet do stu procent badanego materiału. Ten tryb badania ma zastosowanie w kontroli liczby produktów wadliwych w danej partii towaru, lub liczby błędnych rachunków w danym okresie czasu. Zasady obliczania karty *np* przedstawiono we wzorach [29, 30, 31, 32]:

$$PP_{i_{np}} = np_i \quad [29]$$

$$CL_{np} = \bar{np} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k np_i \quad [30]$$

$$UCL_{np} = \bar{np} + 3 \sqrt{\bar{np} \left(1 - \frac{\bar{np}}{n} \right)} \quad [31]$$

$$LCL_{np} = \bar{np} - 3 \sqrt{\bar{np} \left(1 - \frac{\bar{np}}{n} \right)} \quad [32]$$

gdzie poszczególne oznaczenia to:

np_i – wartość pojedynczego pomiaru z liczby jednostek niezgodnych,

k – ilość prób,

n – liczność próby.

Karta frakcji jednostek niezgodnych *percent* lub *proportion* – *p* bada zmienność procesu w oparciu o rozkład Bernoulliego. Jednak w odróżnieniu od karty *np*, która jest używana do kontroli liczby jednostek niezgodnych, karta *p* analizuje frakcję (stosunek liczby obserwacji posiadających pewną cechę do liczności całej

próby statystycznej) tych jednostek. Karty są prawie identyczne. Różnicę pomiędzy nimi stanowi oś rzędnych, która w karcie *np* przedstawia liczbę, podczas gdy w karcie *p* frakcję jednostek niezgodnych. Zależności dotyczące obliczania parametrów karty przedstawiono we wzorach od [33] do [36]:

$$PP_{i_p} = p_i = \frac{np_i}{n} \quad [33]$$

$$CL_p = \bar{p} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k p_i \quad [34]$$

$$UCL_p = \bar{p} + 3 \sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}} \quad [35]$$

$$LCL_p = \bar{p} - 3 \sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}} \quad [36]$$

gdzie poszczególne oznaczenia to:

p – frakcja jednostek uznanych za niezgodne,

\bar{p} – średnia frakcja jednostek uznanych za niezgodne,

np_i – wartość pojedynczego pomiaru z liczby jednostek niezgodnych,

n – liczność próby.

Kolejną kartą kontrolną w aspekcie oceny alternatywnej jest karta *constant* – *c*. Bazuje ona na rozkładzie Poissona i jest stosowana w sytuacjach, gdy chcemy dokonać analizy rzadko występujących zdarzeń. Określa ona liczbę wad w poszczególnych przypadających badaniach. Dodatkowo działa ona przy założeniu równej liczby elementów w każdym badaniu. Jeśli to założenie nie jest spełnione, sugeruje się wówczas wykorzystanie karty *u*. Wzory przedstawiające sposób obliczania karty kontrolnej liczby niezgodności *c* przedstawiono na wzorach [37, 38, 39, 40]:

$$PP_{i_c} = c_i \quad [37]$$

$$CL_c = \bar{c} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k c_i \quad [38]$$

$$UCL_c = \bar{c} + 3\sqrt{\bar{c}} \quad [39]$$

$$LCL_c = \bar{c} - 3\sqrt{\bar{c}} \quad [40]$$

gdzie poszczególne oznaczenia to:

c_i – wartość niezgodności,

\bar{c} – średnia wartość niezgodności,

k – liczba prób.

Ostatnim narzędziem atrybutowej kontroli statystycznej jest karta liczby niezgodności na jednostkę *unit* – u . Działa ona na zasadzie wykreślenia wskaźnika liczby wad. Jest on obliczany jako stosunek liczby wad do liczby badanych jednostek. Zależności dotyczące obliczania punktów oraz granic kontrolnych przedstawiają wzory od [41] do [44]. W odróżnieniu od karty c , karta u nie wymaga stałej liczby jednostek.

$$PP_{i_u} = u_i = \frac{c_i}{n_i} \quad [41]$$

$$CL_u = \bar{u} = \frac{\sum_{i=1}^k c_i}{\sum_{i=1}^k n_i} \quad [42]$$

$$UCL_u = \bar{u} + 3\sqrt{\frac{\bar{u}}{n_i}} \quad [43]$$

$$LCL_u = \bar{u} - 3\sqrt{\frac{\bar{u}}{n_i}} \quad [44]$$

gdzie poszczególne oznaczenia to:

c_i – wartość liczby niezgodności jednostek w podgrupie,

u_i – średnia wartość liczby niezgodności na jednostkę,

\bar{u} – średnia wartość jednostek niezgodnych w próbie,

n_i – licznosc próby.

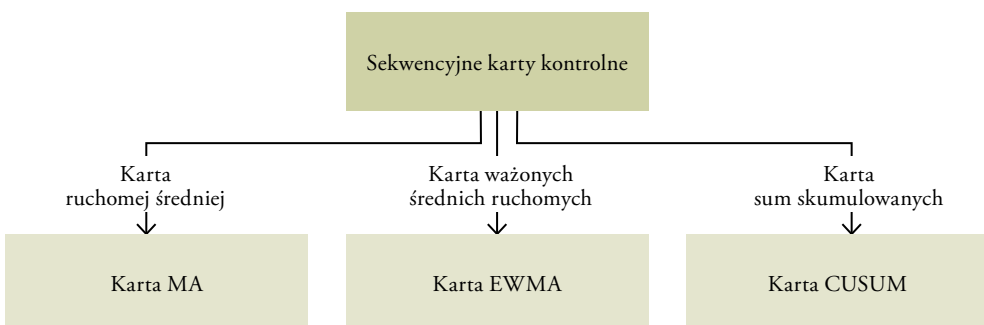
Sekwencyjne karty kontrolne

W wielu przypadkach przedstawione powyżej karty nie mogą stanowić podstawy do weryfikacji, czy sterowania procesem. Przyjmuje się, że klasyczne typy kart kontrolnych służą do ustabilizowania procesu. Natomiast po wyeliminowaniu głównych czynników negatywnie wpływających na stabilność rozpoczyna się faza systematycznego eliminowania zmienności. Temu służą sekwencyjne karty kontrolne.

Alternatywą dla kart sekwencyjnych są karty adaptacyjne oraz karta wielowymiarowa, zwana też kartą T^2 Hotellinga. Określa się je wszystkie jako karty kontrolne nowej generacji. Pierwszą kartą sekwencyjną jest karta ruchomej średniej. Oznaczana również symbolem MA (*Moving Average*). Głównym jej zadaniem jest identyfikowanie małych ruchów wartości średniej badanego procesu oraz pojawiających się ewentualnych trendów.

Istotą karty ruchomej średniej, nie jest wykreślanie lub wyznaczanie wartości albo średnich ze zmierzonych punktów, ale średniej z określonej liczby tych punktów zebranych w próbę. Dlatego jednym z decydujących parametrów charakteryzujących ten typ karty jest parametr w , nazywany również szerokością okna. Jest to liczba prób, których średnie będą wyznaczone do określenia położenia danego punktu. Ideę tego działania uwidoczniono na rysunku 3. Przedstawia on dane bazujące na średnich z sześciu prób. Sze-

Rysunek 2 Podział sekwencyjnych kart kontrolnych



Źródło: opracowanie własne.

rokość okna w tym konkretnym przypadku wynosi 3. Przy obliczaniu pierwszego punktu bierze się tylko i wyłącznie wartość średnią z tej próby, której dany punkt odpowiada. Drugi punkt obliczany już jest przy użyciu drugiej i pierwszej średniej. Dopiero trzeci punkt odpowiadający parametrowi w jest liczony zgodnie z założoną ilością średnich z prób.

W zastosowaniach praktycznych stosuje się szerokość okna wynoszącą od 2 do 10, ale poleca się używać od 3 do 5. Warto również nadmienić, iż przy pierwszych próbach górna oraz dolna granica kontrolna ma charakter schodowy. Jest to podyktowane tym, z jakiej ilości średnich z prób był liczony punkt. Sam kształt wykresu w szerszej perspektywie jest bardziej wygładzony, niż karta średnich obserwacji. Ta tendencja pogłębia się w miarę zwiększenia ilości prób i tym samym parametru w . Ma to jednak swój cel. Dzięki temu można łatwiej wykrywać drobne zmienności oraz ewentualne trendy.

Poniżej przedstawiono formuły, które wykorzystuje program MINITAB® w celu obliczenia karty MA. Zostały one

zawarte w zależnościach od [45] do [51]. Zawierają one w sobie poszczególne wzory dotyczące liczenia granic oraz punktów w przedziale, do wartości szerokości okna oraz powyżej tej wielkości z uwzględnieniem odchylenia standardowego.

$$PP_{i_{MA}} = \frac{\bar{X}_1 + \dots + \bar{X}_i}{i} \quad \text{przy } i \leq w \quad [45]$$

$$PP_{i_{MA}} = \frac{\bar{X}_1 + \dots + \bar{X}_{i-w+1}}{w} \quad \text{przy } i > w \quad [46]$$

$$CL_{MA} = \bar{\bar{X}} = \frac{\sum_{i=1}^k \bar{X}_i}{k} \quad [47]$$

$$UCL_{MA} = \bar{\bar{X}} + k \left(\frac{\sigma}{i} \right) \sqrt{\frac{1}{n_1} + \dots + \frac{1}{n_i}} \quad [48]$$

przy $i \leq w$

$$UCL_{MA} = \bar{\bar{X}} + k \left(\frac{\sigma}{w} \right) \sqrt{\frac{1}{n_1} + \dots + \frac{1}{n_{i-w+1}}} \quad [49]$$

przy $i > w$

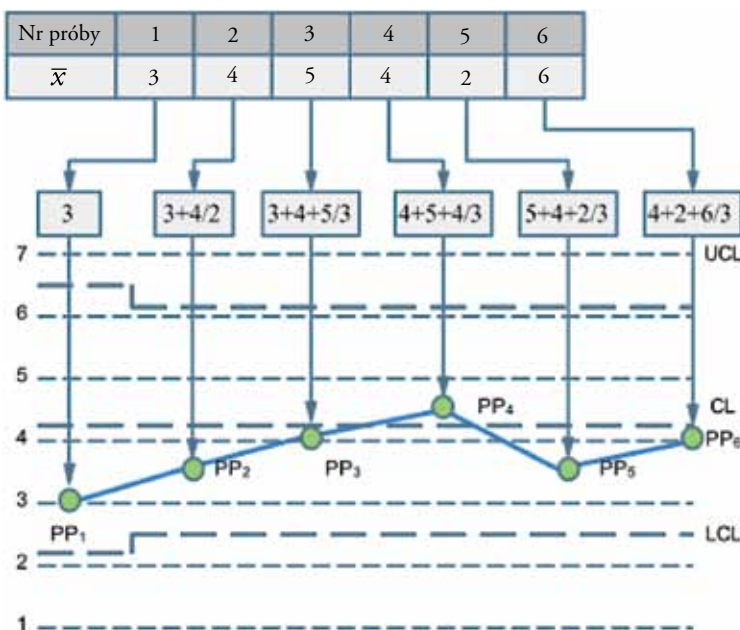
$$LCL_{MA} = \bar{\bar{X}} - k \left(\frac{\sigma}{i} \right) \sqrt{\frac{1}{n_1} + \dots + \frac{1}{n_i}} \quad [50]$$

przy $i \leq w$

$$LCL_{MA} = \bar{\bar{X}} - k \left(\frac{\sigma}{w} \right) \sqrt{\frac{1}{n_1} + \dots + \frac{1}{n_{i-w+1}}} \quad [51]$$

gdzie poszczególne oznaczenia to:

Rysunek 3 Istota działania karty kontrolnej MA



x_i – wartość pojedynczego pomiaru,
 i – numer pomiaru,
 \bar{x} – wartość średnia z wartości średnich w próbie,
 k – liczba prób,
 w – szerokość okna,
 n_i – licznosc próby.

Odmienne spojrzenie na zasadę obliczenia tej karty zaprezentował T. Sałaciński w swojej książce *SPC – statystyczne sterowanie procesami produkcji*. Ten punkt widzenia został przedstawiony we wzorach [52, 53, 54, 55]:

$$PP_{i_{MA}} = \sum_{t=0}^w x_{t-i} \quad [52]$$

$$CL_{MA} = \bar{\bar{x}} = \frac{\sum \bar{x}}{k} \quad [53]$$

$$UCL_{MA} = \bar{\bar{x}} + \frac{A_2 \times \bar{R}}{\sqrt{w}} \quad [54]$$

$$LCL_{MA} = \bar{\bar{x}} - \frac{A_2 \times \bar{R}}{\sqrt{w}} \quad [55]$$

gdzie poszczególne oznaczenia to:

\bar{x} – wartość średnia cechy w próbie,
 $\bar{\bar{x}}$ – wartość średnia z wartości średnich w poszczególnych próbach,
 \bar{R} – wartość średnia rozstępu w próbach,
 A_2 – współczynniki statystyczne,
 k – liczba prób,
 w – szerokość okna,
 n – licznosc próby.

Drugą w kolejności wśród kart sekwencyjnych jest karta wykładniczo ważonych średnich ruchomych *Exponentially Weighted Moving Average* – EWMA, która została po raz pierwszy zaprezentowana przez S.W. Roberts'a. Jako że zasada działania tej karty opiera się na wadze przyłożonej do prób, to ostatnia próba będzie miała wagę najważniejszą (w przeciwieństwie do karty MA, w której wszystkie próby zawarte w szerokości okna mają taki sam wpływ). I dlatego to głównym wskaźnikiem mającym wpływ na położenie punktu jest λ , która jest parametrem wagi. Od jej wartości zależy w jakim stop-

niu analizowane będą wcześniejsze próby. Najczęściej parametr λ przyjmuje się w wartościach z przedziału od 0,2 do 0,5. Dla przykładu program MINITAB® ma wartość standardową ustawioną na 0,2, ale dopuszcza zmianę tego parametru od 0 do 1. Jednak preferuje się przyjmowanie λ wynoszące 0,3 lub 0,4. Na przykład gdy parametr wagi ma wartość 0,2, to spośród całości wpływu na wartość wykładniczo ważonej średniej ruchomej, 20 proc. stanowi wpływ próby bieżącej, a 80 proc. dane zebrane w okresie wcześniejszym.

Wzory opisujące zasadę obliczania granic oraz położenia punktu zależą od sposobu w jaki estymowane jest rozproszenie. W tym przypadku stosuje się rozstęp albo odchylenie standardowe i są one rozwinięciem wzorów kart średnich obserwacji i rozstępu $\bar{x} - R$ oraz średnich obserwacji i odchylenia standardowego $\bar{x} - s$. Zależności opisujące kartę EWMA szacowaną na rozstępie przedstawiono poniżej w wzorach od [56] do [59]:

$$PP_{i_{EWMA}} = z_i = \lambda \times \bar{x}_i + (1 - \lambda) z_{i-1} \quad [56]$$

$$CL_{EWMA} = \bar{\bar{x}} = \frac{\sum \bar{x}}{k} \quad [57]$$

$$UCL_{EWMA} = \bar{\bar{x}} + A_2 \times \bar{R} \sqrt{\frac{\lambda}{2 - \lambda}} \quad [58]$$

$$LCL_{EWMA} = \bar{\bar{x}} - A_2 \times \bar{R} \sqrt{\frac{\lambda}{2 - \lambda}} \quad [59]$$

Natomiast gdy analizuje się proces, w którym miarą rozproszenia jest rozrzut pomiarów w poszczególnych próbach, stosuje się odchylenie standardowe. Tak liczoną kartę EWMA przedstawiono we wzorach [60, 61, 62, 63]:

$$PP_{i_{EWMA}} = z_i = \lambda \times \bar{x}_i + (1 - \lambda) z_{i-1} \quad [60]$$

$$CL_{EWMA} = \bar{\bar{x}} = \frac{\sum \bar{x}}{k} \quad [61]$$

$$UCL_{EWMA} = \bar{\bar{x}} + A_3 \times \bar{s} \sqrt{\frac{\lambda}{2 - \lambda}} \quad [62]$$

$$LCL_{EWMA} = \bar{\bar{x}} - A_3 \times \bar{s} \sqrt{\frac{\lambda}{2 - \lambda}} \quad [63]$$

gdzie poszczególne oznaczenia to:

\bar{x} – wartość średnia cechy w próbie,
 $\bar{\bar{x}}$ – wartość średnia z wartości średnich w poszczególnych próbach,
 \bar{s} – wartość średnia odchylenia standardowego w próbie,
 \bar{R} – wartość średnia rozstępu w próbach,
 A_2, A_3 – współczynniki statystyczne,
 k – liczba prób,
 λ – parametr wagi karty kontrolnej.

Ostatnią wśród kart sekwencyjnych jest karta *Cumulative Sum* – CUSUM, zwana też kartą sum skumulowanych. Jest to jedna z najtrudniejszych kart do obliczania. Jej działanie opiera się na stosunkowo szybkim i wczesnym rozpoznaniu systematycznych zmian procesu w przedziale zawierającym się między 0,5, a 1,5 sigma. Realizowane to jest dzięki kumulowaniu sum odchyłek od wartości docelowej. Obecnie programy statystyczne dopuszczają użycie dwóch typów kart CUSUM. Pierwszy opiera się o typowe granice kontrolne, drugi natomiast o maskownicę w kształcie litery V. Zasadę obliczania pierwszej z wymienionych powyżej kart sum przedstawiono we wzorach od [64] do [68].

$$PP_{i(hi)CUSUM} = S_{hi} = \max \{0, S_{i-1,hi} + x_i - \bar{\mu} - k\} \quad [64]$$

$$PP_{i(lo)CUSUM} = S_{lo} = \max \{0, S_{i-1,lo} + \bar{\mu} - k - x_i\} \quad [65]$$

$$CL_{CUSUM} = 0 \quad [66]$$

$$UCL_{CUSUM} = h \quad [67]$$

$$LCL_{CUSUM} = -h \quad [68]$$

gdzie poszczególne oznaczenia to:
 x_i – wartość pojedynczego pomiaru,
 $\bar{\mu}$ – wartość docelowa,
 k – znos,
 h – interwał decyzyjny.

Posiada ona maskownicę, której granice kontrolne nachylone są do linii poziomej pod pewnym kątem. To nachylenie determinowane jest przez dwie wartości h i k , których proces matematycznego ob-

liczania jest skomplikowany. Dlatego w celu uproszczenia obliczeń ich wielkość przyjmuje się z tablic ARL (*Average Run Length*). Zasadę obliczeń poszczególnych punktów sum skumulowanych przedstawiono we wzorze [69], natomiast pochylenie i szerokość maskownicy za pomocą wzorów [70] i [71].

$$PP_{iCUSUM} = S_n = \sum_{i=1}^n (\bar{x}_i - \bar{\mu}) \quad [69]$$

$$Sl_{CUSUM} = k \quad [70]$$

$$W_{CUSUM} = 2 \times h \quad [71]$$

gdzie poszczególne oznaczenia to:

x_i – wartość średnia cechy w poszczególnych próbach,

$\bar{\mu}$ – wartość docelowa,

Sl_{CUSUM} – pochylenie maskownicy (ang. *slope*),

W_{CUSUM} – szerokość maskownicy (ang. *width*),

k – znos,

h – interwał decyzyjny.

Stabilność procesu

Jednak najważniejszym elementem badania zmienności jest umiejętność odczytania stabilności procesu oraz wykresów. W tym wypadku doradcą jest doświadczenie. Na ogół pierwszym sygnałem informującym o niebezpieczeństwie rozregulowania się procesu jest punkt znajdujący się poza górną lub dolną granicą kontrolną. W praktyce jednak analizę zmienności dokonuje się na dużej liczbie pomiarów, jeżeli pozwala na to sytuacja i sam proces.

Karty kontrolne są narzędziem często wykorzystywanym w dzisiejszych przedsiębiorstwach. Ich użycie nie zawęży się wyłącznie do weryfikowania procesów produkcyjnych czy administracyjnych. Zapewniają pomoc w czasie badań marketingowych. Dodatkowo system Six Sigma umożliwił zastosowanie tych kart kontrolnych na

każdym poziomie zarządzania i kierowania firmą. Jest to bogate źródło wiedzy dotyczącej realizacji celów strategicznych dowolnej organizacji.

Bibliografia:

1. Eckes G., *Rewolucja Six Sigma. Jak General Electric i inne przedsiębiorstwa zmieniły proces w zyski*, Wyd. MT Biznes., Warszawa 2010.
2. Greber T., *Niestandardowe karty kontrolne – czyli jak sobie radzić w nietypowych sytuacjach*, Protokół dostępu: <http://www.statsoft.pl/czytelnia/jakosc/p3.pdf> [16 listopada 2010].
3. Greber T., *Zastosowanie kart kontrolnych do analizy zadowolenia klientów*, Protokół dostępu: <http://www.statsoft.pl/czytelnia/marketing/karty.pdf> [24 listopada 2010].
4. Olszewska A.M., Gudanowska A.E., *Karty kontrolne nowej generacji jako skuteczne narzędzie zarządzania jakością*, „Zarządzanie Jakością” 1/2010 (19), Kraków 2010.
5. Sałaciński T., *SPC – statystyczne sterowanie procesami produkcji*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa 2009.
6. Sleeper A., *Design for Six Sigma Statistics*, Wyd. McGraw-Hill, New York 2006.
7. Wawrzynek J., *Metody opisu i wnioskowania statystycznego*, Wyd. Akademii Ekonomicznej im. Oskara Langego we Wrocławiu, Wrocław 2007.
8. Yeh A.B., Lin D.K.J., Chandramouliswaran Venkataramani, *Unified CUSUM Charts for Monitoring Process Mean and Variability*, Protokół dostępu: http://web2.cc.nctu.edu.tw/~qtqm/qtqmpapers/2004V1N1/2004V1_F4.pdf [25 listopada 2010].
9. <http://www.itl.nist.gov/div898/handbook/eda/eda.htm>.

Mgr inż. **Marek Bartkowiak**, absolwent AMW oraz UG, specjalista ds. systemów udoskonalania procesów.