

Agata Wnuk

Szkoła Doktorska

Szkoła Główna Handlowa w Warszawie

wnuk.agata@gmail.com

Pomiar rektangularyzacji krzywej przeżycia – stan wiedzy i analiza wyników*

Streszczenie

Artykuł powstał w wyniku metodologicznego przeglądu literatury dotyczącej zjawisk kompresji umieralności i rektangularyzacji krzywej przeżycia. Praca ma na celu identyfikację obecnego stanu wiedzy (kluczowych definicji, dostępnych narzędzi pomiaru) oraz analizę badań empirycznych przeprowadzonych dotychczas dla krajów europejskich. Metoda gromadzenia i analizy literatury naukowej została precyzyjnie opisana dla łatwiejszego zrozumienia uzyskanej syntezy wiedzy oraz potencjalnego ulepszenia dalszych badań. Pierwsza część artykułu uwzględnia definicję rektangularyzacji krzywej przeżycia i jej wymiarów oraz powiązaną terminologię. Następnie opisano 26 miar i wskaźników zjawiska wyszukanych w dotychczasowej literaturze naukowej i zestawiono je w tabeli porównawczej. Wreszcie, przedstawiono wyniki przeglądu badań empirycznych dla 11 krajów europejskich: Szwecji, Francji, Szwajcarii, Wielkiej Brytanii, Holandii, Włoch, Finlandii, Danii, Norwegii, Hiszpanii i Polski. Analiza pokazała, iż empiryczne zastosowanie miar rektangularyzacji jest wciąż rzadkie, a część narzędzi pomiaru dedykowanych zjawisku jest sformułowana wyłącznie teoretycznie. Ponadto, w badaniach tych reprezentacja niektórych krajów w Europie jest znikoma. Rezultatem niniejszego przeglądu literatury jest wskazanie luk badawczych oraz interesujących kierunków dalszych badań.

Słowa kluczowe: rektangularyzacja krzywej przeżycia, kompresja umieralności, dyspersja wieku w momencie zgonu, normalne trwanie życia, maksymalna długość życia

* Niniejszy artykuł powstał na podstawie pracy magisterskiej napisanej pod kierunkiem naukowym dr hab. Wiktorii Wróblewskiej, prof. SGH.

Wstęp

Zagadnienie rektangularyzacji krzywej przeżycia stało się przedmiotem zainteresowania badaczy w XX w. wraz z zaobserwowaniem na całym świecie znaczącej poprawy w poziomie umieralności, zmian struktur wieku w momencie zgonu i, w konsekwencji, zmiany kształtu krzywej przeżycia w czasie (Ouellette, Bourbeau, 2011). Rektangularyzacja krzywej przeżycia stanowi ważny model przemian umieralności, który ułatwia retrospektywną i perspektywiczną analizę zmian demograficznych w populacji (Szukalski, 2008). Taka analiza może być z kolei ważna z perspektywy społecznej i ekonomicznej, gdyż zmiany te wpływają bezpośrednio na funkcjonowanie systemu emerytalnego i ubezpieczeń społecznych (Wróblewska, 2017) czy służby zdrowia (Ouellette, Bourbeau, 2011). Interesujące mogą być również historyczne przemiany struktur umieralności i ich socjopsychologiczne skutki, np. postrzeganie śmierci przez jednostki w populacji, ich poglądy na temat relacji międzyludzkich i długoterminowych planów życiowych (Wilmoth, Horiuchi, 1999).

Szeroki zakres zastosowań koncepcji rektangularyzacji krzywej przeżycia i jej mała reprezentacja w polskiej literaturze naukowej, stanowiły punkt wyjścia niniejszej pracy. Dogłębny przegląd literatury posłużył identyfikacji obecnego stanu wiedzy o zjawisku oraz wskazaniu wkładu prac źródłowych do rozwoju teoretycznej koncepcji, poszerzenia zakresu stosowanych miar i wskaźników oraz empirycznego pomiaru zjawiska w Europie.

Metoda

Zgodnie z metodyką Randolpha (2009), zidentyfikowano sześć charakterystyk przeglądu literatury determinujących strategię poszukiwania źródeł oraz strukturę pracy: nastawienie (przegląd teorii, narzędzi badawczych i wyników empirycznych), cel (jw.), perspektywa (neutralna), zakres (kluczowe artykuły w dziedzinie z cytowaniem selektywnym), organizacja (format konceptualny, historyczny i metodologiczny), grupa odbiorców (akademicka).

Materiały źródłowe skompletowano za pomocą katalogów bibliotecznych (Biblioteki Szkoły Głównej Handlowej w Warszawie, Katalogu Centralnego NUKAT), baz czasopism naukowych (*Demographic Research*, *Gerontologist*, *Demography*) oraz internetowych serwisów i wyszukiwarek badawczych (ResearchGate, SpringerLink, Google Scholar), korzystając z licencji Szkoły Głównej Handlowej w Warszawie lub dostępu otwartego.

Źródła polsko- i anglojęzyczne skompletowano za pomocą słów kluczowych: rektangularyzacja krzywej przeżycia (*rectangularization of the survival curve*), kompresja umieralności (*mortality compression*), dyspersja wieku w momencie zgonu (*dispersion of age at death*), zmienność wieku w momencie zgonu (*variability of age at death*), normalne trwanie życia (modalny wiek w momencie zgonu – *modal age at death*), maksymalna długość życia (*maximum life span*). W przeglądzie badań empirycznych wykorzystano nazwy 26 miar zidentyfikowanych w pierwszej części.

Do kryteriów włączenia źródeł do przeglądu należały: bezpośredni związek z przedmiotem pracy (odniesienie do pojęcia rektangularyzacji) oraz istotny wkład w dyskusję (pomijano duplikację treści). Miejsce i data publikacji nie ograniczały selekcji, jednak analizę empiryczną ograniczono do krajów europejskich. Uwagę poświęcono publikacjom, które dotyczyły pomiaru i oceny zjawiska rektangularyzacji, a badania odnoszące się do jej socjoekonomicznych i medycznych przyczyn wykraczały poza zakres tej pracy. Łącznie przeanalizowano 33 źródła naukowe spełniające kryteria selekcji, w tym 4 prace teoretyczne oraz 29 prac uwzględniających badania empiryczne (przy czym warto tutaj wspomnieć, iż część z nich zawiera dość wąskie i mało szczegółowe obliczenia, a ich główną wartość stanowi wprowadzenie teoretyczne do zagadnienia i wkład do dyskusji).

Definicja

Jak podaje Wilmoth i Horiuchi (1999), pierwsza wzmianka o rektangularyzacji krzywej przeżycia w naukowej literaturze pojawiła się już w pierwszej połowie XX wieku, w kontekście biometrii i statystyki medycznej (Pearl [1923] 1940). Termin powrócił następnie dopiero w drugiej połowie lat 70. XX wieku (Upton, 1977; Comfort, 1979), by w 1980 roku zostać szerzej rozwiniętym przez Jamesa Friesa w jego artykule *Aging, Natural Death and the Compression of Morbidity*. O ile jego bezpośredni poprzednicy temat rektangularyzacji podejmowali od strony biologii organizmów żywych (niekoniecznie ludzkich), Fries w swojej pracy skupił się na zmianach w umieralności zachodzących w populacji ludzkiej, rozpoczynając tym samym szerszą dyskusję w dziedzinie demografii nad występowaniem i interpretacją zjawiska. Szczególnie interesowała go zależność pomiędzy zmieniającą się umieralnością a zachorowalnością ludzi, jednak, jak zwracają na to uwagę Wilmoth i Horiuchi (1999), są to odrębne zjawiska, dlatego ich relacja wykracza poza tematyczny obszar artykułu.

Termin rektangularyzacji (*rectangularization*) odnosi się do zaobserwowanej po raz pierwszy w XX wieku zmiany kształtu i pozycji krzywej przeżycia. Zauważono, iż – wraz ze spadkiem umieralności (w szczególności stopniowej eliminacji

umieralności przedwczesnej) oraz koncentracji zgonów wokół naturalnej granicy trwania życia w populacji – kolejne krzywe przeżycia przesuwają się względem osi i przyjmują coraz bardziej „prostokątny” kształt (Fries, 1980). W istocie krzywa ta staje się coraz bardziej płaska dla młodszych grup wieku, a więc prawdopodobieństwo przeżycia pozostaje wysokie do zaawansowanego wieku, oraz coraz stromiej malejąca, kiedy prawdopodobieństwo przeżycia szybko spada do zera w przedziale wieku, w którym dominują zgony związane z procesem starzenia się (Nusselder, Mackenbach, 1996). W procesie tym umieralność z przyczyn zewnętrznych jest stopniowo ograniczana, a pozostała zmienność wieku w momencie zgonu jest uwarunkowana genetycznie (Kannisto, 2000). Jeśli przedwczesna umieralność została by całkowicie wyeliminowana, a więc wszystkie jednostki w populacji dożywałyby naturalnej granicy wieku, krzywa przeżycia osiągnęłaby idealnie „prostokątną” formę (Fries, 1980). Jest to jednak sytuacja czysto hipotetyczna – w rzeczywistości nigdy taka nie będzie, nawet w przybliżeniu (Fries, Crapo, 1981; Kannisto, 2000).

Rektangularyzację krzywej przeżycia można zdefiniować jako graficzną konsekwencję procesu tzw. kompresji umieralności (przykładowy wykres zmiany teoretycznych krzywych przeżycia został zaprezentowany na rysunku 1). Koncepcja ta zakłada, że redukcji zmienności (dyspersji) wieku w momencie zgonu, a więc z postępującym pomniejszaniem się przedziału wieku, na który przypada największa liczba zgonów (Wilmoth, Horiuchi, 1999) i ich koncentracją wokół średniego wieku w momencie zgonu dla populacji (określonego za pomocą parametru e_0)¹ (Nusselder, Mackenbach, 1996), towarzyszy przesuwaniu się tego przedziału ku latom życia odpowiadającym późniejszej starości. Proces rektangularyzacji obserwowany jest przy wzroście wartości oczekiwanej dalszej długości trwania życia noworodka (Nusselder, Mackenbach, 1996). Rektangularyzacja jest jednym z niewielu teoretycznych modeli, które uwzględniają związek pomiędzy średnią długością trwania życia noworodka (e_0) a jego zmiennością (Ebeling, Rau, Baudisch, 2018).

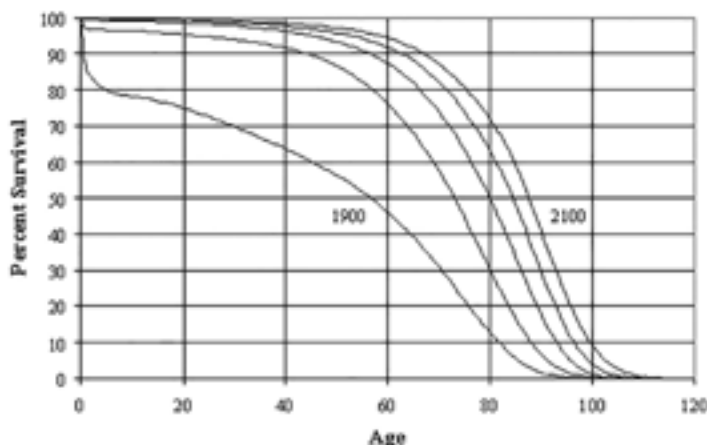
Według Nusselder i Mackenbacha (1996) kompresja umieralności (a więc w konsekwencji rektangularyzacja krzywej przeżycia) może zachodzić w sensie absolutnym lub relatywnym. W pierwszym przypadku umieralność koncentruje się w mniejszym przedziale wieku, więc wyrażona w latach absolutna zmienność wieku w momencie zgonu spada. Absolutna kompresja umieralności w połączeniu ze zwiększającym się oczekiwanym dalszym trwaniem życia oznacza rektangularyzację w sensie absolutnym. W drugim przypadku umieralność koncentruje się w mniejszej proporcji całkowitego oczekiwanego dalszego trwania życia, więc zmienność wieku w momencie

¹ W zależności od źródła, wiek wokół którego koncentrują się zgony w procesie rektangularyzacji jest różnie definiowany – jako oczekiwane trwanie życia noworodka (e_0) lub normalne trwanie życia (modalna wieku w momencie zgonu).

zgonu spada relatywnie do poziomu parametru e_0 . Relatywna kompresja umieralności w połączeniu ze zwiększającym się oczekiwanym dalszym trwaniem życia oznacza rektangularyzację w sensie relatywnym.

Rysunek 1. Ewolucja teoretycznych krzywych przeżycia w latach 1900–2100

Figure 1. Evolution of theoretical survival curves in 1900–2100



Źródło: Bell, Miller (2005), na podstawie danych z The United States Social Security Administration.

Source: Bell and Miller (2005), based on The United States Social Security Administration data.

W 2013 roku Ebeling i in. zaproponowali rozwinięcie idei rektangularyzacji – podejście maksymalnego wewnętrznego prostokąta (*maximum inner rectangle approach* – MIRA). Udoskonalenie miało polegać na zaadaptowaniu koncepcji Friesa do najnowszych zmian w umieralności i przewidywanego rozwoju w najbliższej przyszłości. MIRA dzieli rektangularyzację na zewnętrzną (czyli w klasycznym ujęciu) i wewnętrzną. Pierwsza z nich opisuje relację pomiędzy oczekiwanym dalszym trwaniem życia a maksymalną osiąganą długością trwania życia. Boki zewnętrznego prostokąta krzywej przeżycia są wyznaczone przez najwyższy osiągnięty wiek w momencie zgonu (wertykalnie) oraz początek krzywej, czyli prawdopodobieństwo przeżycia równe 1 (horyzontalnie). Pole prostokąta powinno się powiększać lub pomniejszać wraz z przesuwaniem się maksymalnego wieku w momencie zgonu. Rektangularyzacja wewnętrzna zakłada poszukiwanie największego pola spośród prostokątów pod krzywą przeżycia, których boki zdeterminowane są przez wiek x (horyzontalnie) oraz przeżycie do tego wieku (wertykalnie). Opisuje zatem największą liczbę lat życia przeżytych przez największą proporcję populacji przy obecnym poziomie oczekiwanego dalszego trwania życia (Ebeling, Rau, Baudisch, 2013; Ebeling i in., 2018).

Według Friesa i Crapo (1981), przeciwieństwem kształtu „prostokątnego” są krzywe przeżycia obserwowane wśród dzikich zwierząt, charakteryzujące się wysoką umieralnością neonatalną oraz prawie tak samo wysoką umieralnością dorosłych osobników, praktycznie niezależną od wieku. W ich środowisku każdy dzień charakteryzuje się wysokim ryzykiem zgonu ze względu na ataki ze strony drapieżników czy wypadki, dlatego osiągnięcie przez jednostki biologicznie zdeterminowanej granicy życia jest rzadkością. Podobnie mogła wyglądać sytuacja człowieka prehistorycznego. Nusselder i Mackenbach (1996) twierdzą nawet, że jeszcze około 200 lat temu krzywe przeżycia u populacji ludzkich były bliższe tym u dzikich zwierząt niż u współczesnego człowieka. Rektangularyzacja krzywej przeżycia dla zwierząt zaczyna zachodzić dla nich w niewoli, wraz z udomowieniem lub lepszą opieką. W przypadku populacji ludzkich zmiany w umieralności mają znacznie bardziej złożone przyczyny, m.in. socjoekonomiczne, kulturowe czy środowiskowe.

Fries (1980), rozwijając koncepcję kompresji umieralności i rektangularyzacji krzywej przeżycia, na podstawie obserwacji ponad stu poprzedzających badanie lat, przyjął założenie, że długość ludzkiego życia jest biologicznie zdeterminowana na poziomie komórek oraz organizmu i wynosi 85 lat. Maksymalna możliwa wartość rzeczywiście implikowała zachodzenie rektangularyzacji, gdyż ograniczała rozkład wieku w momencie zgonu z prawej strony – spadek umieralności przedwczesnej musiałby go kompresować, a w rezultacie krzywa przeżycia musiałaby stawać się coraz bardziej „prostokątna”. Jednak sama koncepcja rektangularyzacji nie wymuszała już istnienia górnej granicy średniego czasu trwania życia noworodka, dlatego też Wilmoth i Horiuchi (1999) twierdzą, iż kwestie te powinny być przedmiotem osobnych badań.

Warto wskazać, iż nie tylko brak pierwotnej definicji zjawiska rektangularyzacji w pracy Friesa tworzy pewne niejasności, ale i podejście kolejnych badaczy – w szczególności relacja kompresji umieralności i rektangularyzacji krzywej przeżycia. W źródłach naukowych terminy te są używane na różne sposoby: 1) zamienienie (jako to samo zjawisko), 2) w przybliżeniu jako takie same (dla uproszczenia używa się ogólnego pojęcia „koncepcji kompresji-rektangularyzacji), 3) jako swoje następstwa (rektangularyzacja jako graficzna konsekwencja zachodzącej kompresji) lub 4) oddzielne zjawiska (kompresja umieralności jako malejąca dyspersja wieku w momencie zgonu oraz rektangularyzacja krzywej przeżycia jako malejąca dyspersja i zmiana pozycji krzywej). Nie zawsze jasne jest, które podejście stosują dani autorzy, dlatego dla poprawy jakości przyszłych badań nad zjawiskiem (lub odpowiednio zjawiskami) wskazane byłoby wypracowanie jednej, spójnej i powszechnie akceptowanej definicji.

Horyzontalizacja, wertykalizacja i ekspansja długowieczności

Proces upodabniania się krzywej przeżycia do „prostokąta” nie musi zachodzić równocześnie i nie w równym stopniu na całej jej długości. Dlatego też w niektórych opracowaniach wyróżnia się trzy etapy rektangularyzacji krzywej przeżycia: horyzontalizację, wertykalizację i ekspansję długowieczności. Taki podział pozwala bardziej kompleksowo opisać strukturę zmian w umieralności, jak również porządkuje narzędzia pomiaru (Cheung, Robine, Jow-Ching, Caselli, 2005).

Horyzontalizacja zachodzi na pierwszym odcinku krzywej przeżycia pod wpływem spadku umieralności niemowląt oraz umieralności przedwczesnej, a więc w pierwszej fazie przejścia epidemiologicznego (Cheung i in., 2005), czyli okresie wygasania pandemii chorób zakaźnych (Wróblewska, 2009). Na tym etapie krzywa przeżycia przybliża się do poziomej asymptoty odpowiadającej początkowej liczebności populacji, stopniowo dla coraz wyższego wieku (Szukalski, 2008). Horyzontalizacja odpowiada na pytanie o długość życia kohorty oraz liczbę jej członków, którzy przeżyją do momentu, w którym proporcja zgonów związanych z procesem starzenia będzie dominująca (Cheung i in., 2005). Co ciekawe, Cheung i in. (2005) stwierdzają, iż we wcześniejszej literaturze nie odnaleziono miar ani wskaźników opisujących zmiany na tym etapie rektangularyzacji krzywej przeżycia.

Wertykalizacja towarzyszy dalszej eliminacji umieralności przedwczesnej i zmniejszaniu się dyspersji wieku w momencie zgonu. Opisuje zatem moment, w którym krzywa przeżycia staje się coraz bardziej stroma w przedziale, na który przypada najwięcej zgonów w populacji (Szukalski, 2008). Wertykalizacja odpowiada na pytanie, jak zgony związane z procesem starzenia się są skoncentrowane wokół modalnego wieku w momencie zgonu (Cheung i in., 2005). W przeciwieństwie do horyzontalizacji, Cheung i in. (2005) odnaleźli w literaturze dziesięć miar i wskaźników koncentracji (wokół centralnej wartości) lub wertykalizacji (bezpośredniej stromości) krzywej przeżycia.

Ekspansja długowieczności jest zjawiskiem stosunkowo nowym i ma związek ze zmianami w indywidualnej umieralności jednostek (Szukalski, 2008). Etap ten opisuje coraz dalsze wysuwanie się prawostronnego ogona krzywej przeżycia, informując w ten sposób jak bardzo najwyższe odnotowane długości trwania życia przekraczają modalny wiek w momencie zgonu (Cheung i in., 2005). Przypadki te potwierdzają wspomniany wcześniej brak możliwości przybrania przez krzywą przeżycia w pełni „prostokątnego” kształtu, gdyż implikowałoby to, że wszyscy członkowie populacji umierają w wieku odpowiadającym wartości modalnej, bez ocalałych w prawostronnym

ogonie krzywej (Cheung i in., 2005). Nieco inną interpretację ekspansji długowieczności stosuje Szukalski (2008), który stwierdza, iż ekspansja długowieczności sprawia, że nachylenie krzywej przeżycia opisywane na etapie wertykalizacji przesuwa się na coraz wyższe przedziały wieku. Chociaż do oceny, czy rektangularyzacja zachodzi, niezbędne są tylko pierwsze dwa wymiary, to wyróżnienie ekspansji długowieczności daje bezpośrednią informację o najczęstszym i najdłuższym czasie trwania życia oraz perspektywę w dyskusji nad przyszłym scenariuszem zjawiska, dlatego niektórzy autorzy włączają ją w proces rektangularyzacji (Cheung i in., 2005). W przypadku uwzględnienia lub nie tego etapu w zjawisku rektangularyzacji ważne jest jednak podkreślenie stosowanej definicji ekspansji długowieczności, aby uniknąć sprzeczności. Dla tego etapu (ekspansji długowieczności) w literaturze wyróżniono trzy wskaźniki (Cheung i in., 2005).

Według Szukalskiego (2008), obserwując realny przebieg przejścia demograficznego i epidemiologicznego, można ustalić, iż wyróżnione etapy rektangularyzacji krzywej przeżycia występują chronologicznie – pierwsza uwidacznia się horyzontalizacja (efekt zmian w umieralności w najmłodszych grupach wieku), następnie wertykalizacja (zmiany w umieralności dorosłych), a ekspansja długowieczności nadchodzi jako ostatnia, pojawiając się w krajach wysoko rozwiniętych dopiero w ciągu ostatnich dekad (zmiany w umieralności w najstarszych grupach wieku). Jednocześnie, Cheung i in. (2005) podają w wątpliwość, czy zmiany te mają uniwersalny wzorzec – być może różnią się w zależności od regionu lub etapu przejścia epidemiologicznego. Stwierdzają, iż aby odpowiedzieć na to pytanie, potrzebne są dalsze analizy na różnorodnych zestawach danych, ponieważ we wcześniejszych badaniach rektangularyzacji nie stosowano wskazanego podziału. Określony przez nich trend, na danych obejmujących okres jedynie 25 lat dla Hongkongu, nie jest więc możliwy do porównania z sytuacją w innych krajach czy w dłuższym okresie. Zgadzają się jednak, że głównym przedmiotem przyszłych dyskusji będzie przede wszystkim ostatni etap rektangularyzacji, a dokładniej – jak dużej redukcji może ulec zmienność w długowieczności i jak daleko od wartości modalnej może przesunąć się prawostronny ogon krzywej przeżycia.

Scenariusze dalszego rozwoju

Chociaż w literaturze istnieją głosy krytykujące koncepcję kompresji umieralności i rektangularyzacji krzywej przeżycia (m.in. Myers, Manton, 1984 czy Manton, Tolley, 1991), to powszechnie jej słuszność jest uznana, zwraca się natomiast uwagę na to, iż zjawisko nie musi stale postępować i może uwzględniać różne scenariusze. Wilmoth

i Horiuchi (1999) przywołują popularną opinię, iż proces ten, chociaż opisywał ważną historyczną zmianę w umieralności ludzi, w drugiej połowie XX wieku istotnie zwolnił. Obserwowany trend może w dużym stopniu zależeć od przedziału wieku, płci czy czasu objętego analizą – dla danego okresu zmienność wieku w momencie zgonu może prezentować ogólną tendencję spadkową, a równocześnie stałą lub rosnącą dla niektórych grup wieku i/lub płci. Kannisto (2000) zauważa również, iż obserwowana kompresja umieralności byłaby wyższa w małych subpopulacjach ograniczających heterogeniczność wynikającą z czynników środowiskowych, takich jak: zawód, edukacja, stan cywilny, dostęp do opieki zdrowotnej, dieta, palenie papierosów czy uprawianie sportu. Oczywiście, jak zauważa, życie jednostki zależy również od genetyki i wielu nieprzewidywalnych zdarzeń, dlatego nawet w wysoko homogenicznej subpopulacji nie jest możliwe, aby jej członkowie umierali nawet w przybliżonym wieku. Można zatem wnioskować, iż kompresja umieralności może mieć pewną granicę – przedział zmienności wieku w momencie zgonu, którego nie da się bardziej zawęzić.

Według Wilmoth i Horiuchi (1999) chociaż brak podstaw, by twierdzić, że kompresja umieralności będzie nieskończenie postępować, to jej spowolnienie, nie musi oznaczać końca – być może będzie ona występować okresowo i w różnym natężeniu. Może również nastąpić opóźnienie umieralności (*shifting mortality*) – Bongarts i Feeney (2002, 2003), cytowani przez Canudas-Romo (2008), opisują sytuację, w której krzywe przeżycia dla kolejnych lat zachowują swój kształt, jednak wraz ze zmniejszającą się umieralnością przesuwają się w prawo. Idea opóźnienia umieralności może być krytyką koncepcji kompresji umieralności i rektangularyzacji krzywej przeżycia lub opisem jej następstwa po osiągnięciu przez populację pewnego etapu. Jak zauważają Börger, Genz, Ruß (2018), kompresja-rektangularyzacja, ekspansja długowieczności i opóźnienie umieralności mogą zachodzić w populacji w scenariuszu indywidualnym, nie zachodzić wcale lub zachodzić równolegle w scenariuszu mieszanym. Dokładniej, autorzy ci badają, czy zmiany na krzywej przeżycia w czasie można przypisać wyłącznie jednemu z tych zjawisk czy też wykazują one cechy łączące elementy niektórych lub wszystkich z nich, z zastrzeżeniem, iż interpretacja może zależeć od obranych definicji, które, jak już zostało to wspomniane wcześniej, bywają nieprecyzyjne i mogą się wykluczać. Po szerszy opis wyprowadzonych definicji poszczególnych scenariuszy oraz metodę badania przypadków indywidualnych i mieszanych, autorka niniejszego artykułu odsyła do cytowanej pozycji Börger i in. (2018). W końcu, Thatcher, Cheung, Horiuchi, Robine (2010) wskazują możliwość przyszłej dekompresji, gdyż pierwotna poprawa w umieralności osób dorosłych i starszych może być przyczyną zbyt dużego obciążenia demograficznego i braku wystarczającej liczby osób do opieki, co z kolei wpłynie na ponowne pogorszenie sytuacji osób najstarszych i wzrost umieralności.

Przegląd miar rektangularyzacji

Mimo braku formalnej definicji rektangularyzacji i wskazówek jak ją mierzyć, słuszność koncepcji przyznano przede wszystkim na podstawie wizualnej oceny zmian kształtu krzywej (Wilmoth, Horiuchi, 1999). Równocześnie, od lat 80. XX wieku, zaproponowano wiele różnorodnych miar i wskaźników ujmujących inne wymiary zjawiska. Oczywiście nie jest konieczna analiza ich wszystkich – część jest ze sobą silnie skorelowana, a inne mogą prowadzić do sprzecznych wniosków (Wilmoth, Horiuchi, 1999, Cheung i in. 2005). Dalej opisano wzory, zmienne i interpretacje 26 narzędzi pomiaru, odnalezionych w dotychczasowej literaturze naukowej. Warto wspomnieć, iż pierwszych siedem opisanych miar, a także rodzina wskaźników C oraz miary koncentracji są miarami klasycznymi stosowanymi do oceny stopnia dyspersji i nie odnoszą się one z definicji do procesu rektangularyzacji. Miary te były jednak stosowane do opisu tego procesu w dotychczasowej literaturze naukowej. Pozostałe wymienione miary i wskaźniki zostały dedykowane właściwemu procesowi rektangularyzacji, a więc odnoszą się zarówno do dyspersji, jak i zmiany kształtu oraz pozycji krzywej przeżycia. Są one efektem nowszych analiz zjawiska i ich stosowanie – jeszcze nie tak szerokie jak narzędzi zaadaptowanych z innych dziedzin – stanowi nową, interesującą perspektywę w analizie przemian umieralności.

Opisane narzędzia pomiaru zestawiono w tabeli porównawczej (tabela 1), klasyfikując je względem etapów (horyzontalizacja, wertykalizacja i ekspansja długowieczności) lub typu rektangularyzacji (zewnętrzna, wewnętrzna, absolutna, relatywna) oraz wskazując ich jednostki i zachowanie wartości względem zmian zachodzących w procesie kompresji-rektangularyzacji.

Rozstęp kwartyłowy

Rozstęp kwartyłowy *IQR* jest jedną z częściej opisywanych miar rektangularyzacji. Jego zaletą jest prostota konstrukcji i interpretacji oraz wyrażenie wyników w jednostce lat życia (Wilmoth, Horiuchi, 1999). Za pomocą wartości pierwszego i trzeciego kwartyła mierzy się rozpiętość wieku, na który przypada środkowe 50% zgonów w populacji, czyli różnicę pomiędzy wiekiem, do którego dożyje 25% i 75% członków kohorty w tablicy trwania życia (Siegel, 2012; Wróblewska, 2017). Spadek wartości *IQR* świadczy o pomniejszeniu się dyspersji wieku w momencie zgonu (Wilmoth, Horiuchi, 1999). Wilmoth i Horiuchi (1999) wyznaczają wartość *IQR* za pomocą wzoru:

$$IQR = x_2 - x_1, \quad (1)$$

gdzie: x_1, x_2 – wartości wieku, takie że dla krzywej przeżycia $S(x)$, $S(x_1) = 0,75$ i $S(x_2) = 0,25$.

Entropia tablic trwania życia

Równie często w literaturze jest stosowana entropia tablic trwania życia – H . Jest to miara klasyczna, zaadaptowana w latach 70. XX wieku przez Keyfitza do pomiaru rektangularyzacji i heterogeniczności rozkładu wieku w momencie zgonu (Nusselder, Mackenbach, 1996). Wskaźnik wyznaczany dla dowolnego zakresu wieku od x do ω (Wróblewska, 2017) informuje o procentowej poprawie w oczekiwanym dalszym trwaniu życia dla wieku x , przy jednoczesnej poprawie w umieralności we wszystkich grupach wieku (Nagnur, 1986). Na przykład, wartość H równa 0,2 oznaczałaby, że spadek umieralności o 1% we wszystkich grupach wieku prowadzi do wzrostu średniego trwania życia o 0,2% (Nusselder, Mackenbach, 1996). H Keyfitza przyjmuje wartości od 0 do 1 – im bliżej 0, tym wyższa kompresja umieralności (homogeniczność wieku w momencie zgonu) (Wróblewska, 2017). W pracy Nusselder i Mackenbacha (1996) entropia tablic trwania życia zadana jest wzorem:

$$H_x = \frac{\sum_{a=x}^{\omega} d_{a, a+n} e_{a+.5n}}{e_x}, \quad (2)$$

gdzie: x – wiek początkowy; ω – wiek końcowy; $d_{a, a+n}$ – liczba osób zmarłych w przedziale wieku $a, a+n$ – z populacji osób żyjących w wieku x ; $e_{a+.5n}$ – oczekiwana długość życia w wieku $a+.5n$; n – długość wybranego przedziału wieku.

Normalne trwanie życia

Chociaż termin normalnego trwania życia został wprowadzony przez Wilhelma Lexisa na ponad 100 lat przed rozwinięciem w demografii koncepcji rektangularyzacji krzywej przeżycia, pozostaje ono jedną z ważniejszych miar zjawiska (Kannisto, 2000). Normalne trwanie życia M odpowiada modalnej wieku w momencie zgonu – wiekowi, na który przypada największa liczba zgonów w populacji określana na podstawie tablic trwania życia (Wróblewska, 2017). To właśnie wokół tej wartości, wraz z malejącą umieralnością, powinny koncentrować się zgony. Wraz z ekspansją długowieczności, powinna się ona przesuwać ku latom późnej starości. Jest to miara

stosunkowo prosta w użyciu, w opracowaniu Wróblewskiej (2017) wyznaczona jest za pomocą formuły²:

$$M = x + \frac{(d_x - d_{x-1})}{(d_x - d_{x-1}) + (d_x - d_{x+1})}, \quad (3)$$

gdzie: d_x – liczba zgonów w wieku x , na który przypada maksimum zgonów w tablicy trwania życia.

Odchylenie standardowe

Tradycyjna miara odchylenia standardowego zastosowana w dziedzinie umieralności może mierzyć dyspersję wieku w momencie zgonu – wskazywać odstępstwa zaobserwowanych wartości wieku w momencie zgonu od średniej dla populacji (Nusselder, Mackenbach, 1996). Wraz ze spadkiem zmienności rozkładu, wartość odchylenia standardowego w momencie zgonu σ_d spada (Wilmoth, Horiuchi, 1999). Dodatkowo, spadek σ_d w połączeniu ze wzrostem oczekiwanego dalszego trwania życia świadczy o zajściu rektangularyzacji w sensie absolutnym (Nusselder, Mackenbach, 1996). Zaletą miary jest wyrażenie wartości w jednostce lat życia, jednak wskazuje się trudność jej obliczenia oraz silną korelację z innymi wskaźnikami (Wilmoth, Horiuchi, 1999). Jej wartość wyznaczyć można za pomocą formuły (Siegel, 2012):

$$\sigma_d = \sqrt{(\sum x_d^2 \div n) - e_0^2}, \quad (4)$$

gdzie: x_d – wiek w momencie zgonu; e_0 – średni wiek w momencie zgonu; n – całkowita liczba zgonów.

Współczynnik zmienności

Nusselder i Mackenbach (1996) proponują również zastosowanie miary współczynnika zmienności CV . Zgodnie z konwencjonalną formułą, iloraz wartości σ_d i średniej wieku w momencie zgonu jest względną miarą zmienności, zadaną wzorem (zapis własny):

$$CV = \frac{\sigma_d}{e_0}. \quad (5)$$

² W literaturze naukowej są również dostępne inne, bardziej zaawansowane formuły obliczania wartości M (np. Canudas-Romo, 2008, Ouellette, Bourbeau, 2011).

Spadek wartości CV w połączeniu ze wzrostem dalszego oczekiwanego trwania życia oznacza zajście rektangularyzacji w sensie relatywnym (Nusselder, Mackenback, 1996).

Odchylenie standardowe powyżej modalnej

Odchylenie standardowe wieku w momencie zgonu można mierzyć dla osób, które dożyły co najmniej wieku modalnego w populacji. W ten sposób uzyskana zostanie informacja o przebiegu kompresji umieralności wśród osób starszych (Wróblewska, 2017). Według Kannisto (2000), na zaawansowanym etapie rektangularyzacji wartość modalna staje się kluczową miarą długości życia, jednak sama w sobie nie ukazuje pełni informacji. Jak zauważa, wraz ze wzrostem modalnej, odchylenie standardowe powyżej niej spada – oznacza to, iż krzywa nie tylko przesuwa się, ale jej prawostronne nachylenie staje się również bardziej strome, zwiększając tym samym relatywną kompresję dla wieku zaawansowanej starości. Obserwacja tej tendencji jest możliwa za pomocą miary odchylenia standardowego powyżej modalnej $SDM(M_+)$, która spada wraz ze zmniejszaniem się dyspersji wieku w momencie zgonu. Miarę wyznaczyć można za pomocą formuły (Wróblewska, 2017):

$$SDM(M_+) = \sqrt{\frac{\sum_{i=M}^{\omega} (\bar{t}_i - M)^2 \cdot d_i}{l_M}}, \quad (6)$$

gdzie: M – wartość modalna wieku w momencie zgonu; ω – najstarsza grupa wieku w tablicach trwania życia; i – wiek od M do ω ; \bar{t} – średni wiek w momencie zgonu osób zmarłych w wieku od t do $t + 1$ lat; d_i – liczba osób zmarłych w ciągu roku w wieku i ; l_M – liczba osób dożywających co najmniej do wieku M .

Cztery odchylenia standardowe powyżej modalnej

Na tej podstawie wyznacza się również wartość czterech odchyłeń standardowych powyżej modalnej $M + 4SDM(M_+)$. Tak powstała miara, w rozkładzie normalnym zgonów wokół modalnej, miałyby wskazywać, jak bardzo teoretyczne maksymalne trwanie życia może wykroczyć poza poziom parametru normalnego trwania życia. Wraz ze spadkiem zmienności wieku w momencie zgonu w najstarszych grupach wieku, wartość $M + 4SDM(M_+)$ spada (Cheung i in., 2005).

Stopień horyzontalizacji β

Cheung i in. (2005) wskazują również zastosowanie wartości wyznaczonej przez cztery odchylenia standardowe poniżej modalnej $M - 4SDM(M_+)$ do konstrukcji kąta β mierzącego stopień horyzontalizacji krzywej przeżycia. Jest to pierwsza miara w literaturze poświęcona temu etapowi rektangularyzacji. Według autorów, wartość $M - 4SDM(M_+)$ oddziela przedział krzywej przeżycia, na którym większość zgonów jest związana z umieralnością niemowląt i umieralnością przedwczesną, a więc przedział, na którym, wraz ze spadkiem umieralności, krzywa staje się bardziej horyzontalna. Kąt β konstruuje się, opierając się na przekątnej łączącej dwa punkty: moment narodzin, w którym prawdopodobieństwo przeżycia jest równe 1, oraz punkt odpowiadający $M - 4SDM(M_+)$, w którym prawdopodobieństwo przeżycia jest równe $0 < a \leq 1$. Wartości β przyjmują wartości od 0 stopni, kiedy przekątna jest całkowicie horyzontalna (nikt nie umiera przed $M - 4SDM(M_+)$), do 90 stopni, kiedy przekątna jest całkowicie wertykalna (wszyscy umierają w momencie narodzin), a więc wartość β spada w miarę postępującej rektangularyzacji na pierwszym z jej etapów. W opracowaniu przedstawiono formułę:

$$\beta = \arctan \left| \frac{Sh_{\min} - Sh_{\max}}{h_{\min} - h_{\max}} \right|, \quad (7)$$

gdzie: Sh_{\max} – prawdopodobieństwo przeżycia w wieku 0; Sh_{\min} – prawdopodobieństwo przeżycia do wieku odpowiadającego $M - 4SDM(M_+)$; h_{\min} – wiek odpowiadający $M - 4SDM(M_+)$; h_{\max} – wiek początkowy kohorty.

Współczynnik Giniego

Współczynnik Giniego G_0 , zwany również współczynnikiem koncentracji, to miara szeroko stosowana w statystyce i naukach społecznych do wyrażenia różnego rodzaju nierówności, a w kontekście kompresji umieralności mierząca nierówności w rozkładzie wieku w momencie zgonu (Siegel, 2012; Shkolnikov, Andreev, Begun, 2003). Współczynnik przyjmuje wartości od 0 do 1, gdzie 0 oznacza brak dyspersji wieku w momencie zgonu (wszyscy członkowie populacji umierają w tym samym wieku), a wartości bliższe 1 – większe zróżnicowanie zgonów według wieku (Wilmoth, Horiuchi, 1999). Wartość współczynnika Giniego można interpretować jako średnią różnicę długości życia dwóch losowo wybranych jednostek z populacji w odniesieniu do średniej długości życia (Wróblewska, 2017). Współczynnik G_0 można wyznaczyć m.in. za pomocą formuły (Shkolnikov i in., 2003):

$$G_0 = \frac{1}{2 \cdot (l_0)^2 \cdot e_0} \sum_{i=0}^n \sum_{j=1}^n |x_i - x_j|, \quad (8)$$

gdzie: l_0 – początkowa liczebność populacji; e_0 – oczekiwane dalsze trwanie życia noworodka; x_i i x_j – wiek dwóch losowo wybranych osób z populacji.

Absolutny współczynnik koncentracji

Aby otrzymać informację o średniej różnicy wieku w momencie zgonu dla populacji wyrażonej w jednostce lat, Shkolnikov i in. (2003) proponują zastosowanie absolutnego wskaźnika koncentracji G_0^{abs} (w literaturze stosuje się również oznaczenie *AID* – *average inter-individual difference*). Wartość G_0^{abs} wyznaczają jako iloczyn współczynnika Giniego oraz oczekiwanego dalszego trwania życia e_0 :

$$G_0^{\text{abs}} = G_0 \cdot e_0. \quad (9)$$

Krzywa Lorenza

Nierówności w rozkładzie zgonów według wieku można zidentyfikować również graficznie za pomocą krzywej koncentracji Lorenza, wyrażającej zależność pomiędzy skumulowanym udziałem w czasie trwania życia Φ_x oraz skumulowanym udziałem w populacji F_x (Wróblewska, 2017). Według Shkolnikova i in. (2003), w sytuacji pełnej równości czasów trwania życia w populacji (wszyscy dożywają do tego samego wieku i umierają), współrzędne Φ_x byłyby równe F_x , a krzywa Lorenza idealnie pokrywałaby się z przekątną łączącą punkty (0, 0) i (1, 1) w układzie współrzędnych. Im większa zmienność wieku w momencie zgonu, tym większe odchylenie krzywej od przekątnej. Autorzy dla Φ_x i F_x podają następujące formuły:

$$F_x = \frac{\sum_{t=0}^x d_t}{\sum_{t=0}^{\omega} d_t} = 1 - \frac{l_{x+1}}{l_0}, \quad (10)$$

$$\Phi_x = \frac{\sum_{t=0}^x d_t \cdot \bar{t}}{\sum_{t=0}^{\omega} d_t \cdot \bar{t}} = \frac{T_0 - (T_x + x l_x)}{T_0}, \quad (11)$$

gdzie: x – wiek od 0 do ω ; ω – najwyższy wiek w tablicy trwania życia; \bar{t} – średnia wieku w momencie zgonu dla osób zmarłych pomiędzy t i $t + 1$ lat; d_t – liczba osób w wieku t zmarłych w ciągu roku; l_x – liczba osób, które dożyły wieku x ; T_x – łączny fundusz dalszego trwania życia w wieku x .

Współczynnik koncentracji Giniego stanowi połowę pola powierzchni odchylenia krzywej Lorenza od przekątnej, dlatego równoważnie wyznaczyć go można za pomocą formuły:

$$G_0 = 1 - \sum_{x=0}^{\omega} (F_{x+1} - F_x)(\Phi_{x+1} - \Phi_x). \quad (12)$$

Rodzina wskaźników C

Rodzina wskaźników C (tłum. własne, *C-family*) – C10, C25, C50 oraz C90 – jest proponowana przez Kannisto (2000) do badania najkrótszego przedziału wieku, na który przypada odpowiednio 10%, 25%, 50% lub 90% zgonów w populacji. Zaletą miary jest, według autora, jej niezależność od skali wieku czy percentyli – wskazuje ona kompresję umieralności niezależnie od tego, gdzie zachodzi. Każdy spośród wskaźników C daje zbliżony obraz sytuacji, dlatego autor zaleca wybór jednego. Równocześnie zauważa, że mogą one odpowiadać kolejnym stopniom zaawansowania rektangularyzacji – w miarę stabilizacji przedziału mniejszej proporcji zgonów, obserwacji poddawać można coraz większe segmenty umieralności (redukcja wskaźników C wyższego rzędu wymusza redukcję przedziałów C niższego rzędu). Autor sugeruje, iż wskaźnik C90 jest wystarczającą podstawą do stwierdzenia „pełnej rektangularyzacji”, gdyż część zgonów przedwczesnych (przypuszczalnie ok. 10%) nie jest możliwa do eliminacji i zawsze będzie objawiała się pewną zmiennością. Oznacza to, iż kompresja umieralności osiągnęłaby swoje maksimum, kiedy przedział C90 zostałby zredukowany do 1 roku.

Kannisto wyznacza wskaźnik C poprzez zsumowanie liczby zgonów, równomiernie po obu stronach od modalnej, do momentu osiągnięcia odpowiednio 10%, 25%, 50% lub 90% populacji, oraz wyliczenie długości przedziału, w którym osiągnięty został dany pułap. Ze względu na nierównomierny rozkład zgonów według wieku wokół wartości modalnej, od liczby lat jest odejmowany ułamek z ostatniego roku, w którym przekroczono dany pułap.

Stały prostokąt

Wyróżniono również grupę miar bezpośrednio odnoszących się do definicji rektangularyzacji opartej na wizualnym przybliżaniu się krzywej przeżycia do

„prostokąta”. Podstawową spośród nich jest stały prostokąt FR (tłum. własne, *fixed rectangle*). Przywołana w Wilmoth, Horiuchi (1999) miara opiera się na prostokącie wyznaczonym przez prostą $y = 1$ oraz prostą $x = \phi$ wychodzącą z arbitralnie wyznaczonego, prawostronnego krańca. FR jest równe proporcji prostokąta, która znajduje się pod krzywą przeżycia w tym samym układzie współrzędnych, a wraz z postępowaniem rektangularyzacji, jej wartość będzie wzrastać. Wilmoth i Horiuchi proponują wyznaczenie wartości stałego prostokąta według formuły:

$$FR = \frac{\int_0^{\phi} S(x) dx}{\phi}, \quad (13)$$

gdzie ϕ odpowiada wybranemu prawostronnemu krańcowi prostokąta.

Ruchomy prostokąt

Podobnym wskaźnikiem jest ruchomy prostokąt (tłum. własne, *moving rectangle*) – MR . W tym przypadku jednak prawostronny bok prostokąta dynamicznie się zmienia, w zależności od prawdopodobieństwa przeżycia w najstarszych grupach wieku – badacz arbitralnie wybiera wartość ε odpowiadającą ostatniemu żyjącemu ułamkowi oryginalnej kohorty (np. przy wartości $\varepsilon = 10^{-3}$ zakładamy, że prawostronny bok prostokąta zawsze równa się wiekowi, do którego dożyła 0,001 kohorty). MR równa się proporcji prostokąta znajdującej się pod krzywą przeżycia, a wraz z postępowaniem rektangularyzacji, jej wartość wzrasta:

$$MR = \frac{\int_0^{\gamma} S(x) dx}{\gamma}, \quad (14)$$

gdzie γ taki, że $S(\gamma) = \varepsilon$ (Wilmoth, Horiuchi, 1999).

Indeks rektangularyzacji

Jako rozwinięcie miary ruchomego prostokąta, Rousson i Paccaud (2010) proponują, stosowany wcześniej m.in. przez Kannisto (2007), indeks rektangularyzacji R (*index of rectangularity*), który eliminuje wpływ wczesnej umieralności niemowląt, dzieci i młodych dorosłych, skupiając się przede wszystkim na osobach najstarszych w populacji. Autorzy sugerują wyznaczenie ruchomego prostokąta przez dwa ruchome boki – arbitralnie wybrany wiek początkowy t_0 oraz wysoki kwantyl t_Q . Rozpatrywana jest zatem nowa krzywa przeżycia, taka że $S(t_0) = 1$ oraz $S(t_Q) = 1 - Q$.

Obliczając proporcję prostokąta pod nową krzywą przeżycia, Rousson i Paccaud wyznaczają indeks rektangularyzacji R za pomocą wzoru:

$$R = \frac{\int_{t_0}^{t_Q} S(t) dt - (t_Q - t_0) \cdot (1 - Q)}{(t_Q - t_0) \cdot Q}. \quad (15)$$

Według autorów t_Q może funkcjonować samodzielnie jako indeks długowieczności – im wyższą wartość przyjmuje, tym bardziej na prawo wysunięta jest krzywa przeżycia.

Warunkowe oczekiwane dalsze trwanie życia

Na podstawie powyższych dwóch indeksów, Rousson i Paccaud (2010) wyznaczają miarę warunkowego oczekiwanego dalszego trwania życia (tłum. własne, *conditional life expectancy*) $CLE_{t_0, Q}$ zależne od wieku $\geq t_0$ oraz od wieku $\leq t_Q$. Na podstawie definicji R wyprowadzają formułę:

$$CLE_{t_0, Q} = t_Q + (R - 1)(t_Q - t_0) = t_0 + R(t_Q - t_0), \quad (16)$$

w szczególnym przypadku: dla $t_0 = 0$, $CLE_{0, Q} = R \cdot t_Q$.

Zaletą miary jest możliwość porównania zmiany w warunkowym oczekiwanym dalszym trwaniu życia pomiędzy dwoma krzywymi przeżycia A i B oraz stwierdzenia, jaka jej część wynika ze zmiany w rektangularyzacji, a jaka ze zmiany w długowieczności. W tym celu Rousson i Paccaud opisali różnicę za pomocą formuły:

$$\begin{aligned} CLE_{t_0, Q}(B) - CLE_{t_0, Q}(A) &= (R(B) - R(A)) \cdot \left(\frac{t_Q(A) + t_Q(B)}{2} - t_0 \right) + \\ &+ (t_Q(B) - t_Q(A)) \cdot \left(\frac{R(A) + R(B)}{2} \right). \end{aligned} \quad (17)$$

Pierwszy składnik otrzymanej sumy wskazuje różnicę w CLE przypisywaną zmianie w rektangularyzacji przy niezmiennym indeksie długowieczności (średniej arytmetycznej $t_Q(A)$ i $t_Q(B)$), drugi – różnicę w CLE przypisywaną zmianie w długowieczności przy niezmiennym indeksie rektangularyzacji (średniej arytmetycznej $R(A)$ i $R(B)$). Obydwa są wyrażone w latach – dla procentowego ujęcia udziału rektangularyzacji w całkowitej zmianie, autorzy wprowadzają dodatkowy wskaźnik – *LEAR* (*life expectancy difference attributable to rectangularization*). Podając przykładową interpretację

tych wskaźników z opracowania: jeśli $CLE_{t_0,Q}(B) - CLE_{t_0,Q}(A) = 11,7 = 4,3 + 7,4$, to w całkowitej zmianie CLE o 11,7 roku, 4,3 roku są przypisywane zmianie w rektangularyzacji, a 7,4 roku zmianie w długowieczności. Z kolei $LEAR = \frac{4,3}{11,7} = 37\%$ oznacza, iż 37% zmiany w CLE dotyczy zmiany w rektangularyzacji.

Najszybszy spadek

Miara najszybszego spadku (tłum. własne, *fastest decline, maximum/greatest downward slope*) mierzy ujemne nachylenie w punkcie najszybszego spadku krzywej przeżycia dla zakresu wieku dorosłego (w opracowaniach za dolną granicę arbitralnie przyjmuje się 15 lub 25 lat) (Wilmoth, Horiuchi, 1999; Siegel, 2012). FD wzrasta wraz z rektangularyzacją, a jego wartość wyznacza się za pomocą formuły (Wilmoth, Horiuchi, 1999):

$$FD = \max\{-S'(x)\} \text{ dla } x \geq 15. \quad (18)$$

W analizie empirycznej, zamiast pochodnych, są stosowane pierwsze różnice, a krzywa przeżycia jest na początku wygładzana w celu usunięcia losowej zmienności.

Minimalna krzywizna

Jak podają Wilmoth i Horiuchi (1999), momentowi tuż przed najbardziej stromym spadkiem (mierzonym przez FD) odpowiada miara SC (*sharpest corner*), we wcześniejszym opracowaniu Eakina i Wittena (1995) nazwana również minimalną krzywizną (*minimum curvature*). Wilmoth i Horiuchi (1999) wartość SC wyznaczają za pomocą ujemnej drugiej pochodnej krzywej przeżycia w punkcie, w którym dla wieku dorosłego krzywa przeżycia zaczyna najszybciej spadać:

$$SC = \max\{-S''(x)\} \text{ dla } x \geq 15. \quad (19)$$

Według opracowania, wraz z postępowaniem rektangularyzacji, wartość SC wzrasta.

Maksymalna krzywizna

Z kolei momentowi tuż po najbardziej stromym spadku odpowiada miara QP (*quickest plateau*) (Wilmoth, Horiuchi, 1999), przez Eakina, Wittena (1995) nazwana również maksymalną krzywizną (*maximum curvature*). Wartość QP jest wyznaczana przez dodatnią drugą pochodną krzywej przeżycia, w punkcie, w którym wyrównuje

się (spłaszcza) najszybciej dla bardzo zaawansowanego wieku (Wilmoth, Horiuchi, 1999):

$$QP = \max\{S''(x)\} \text{ dla } x \geq 15. \quad (20)$$

Wraz z rektangularyzacją, wartość QP wzrasta.

Indeks wydłużenia

Nieco bardziej złożoną miarą stromości nachylenia krzywej przeżycia w wyższych grupach wieku jest indeks wydłużenia (tłum. własne, *prolate index*) – PI , zaproponowany po raz pierwszy przez Eakina i Wittena (1995), bazujący na miarach minimalnej i maksymalnej krzywizny. Miara jest zadana przez Wilmotha i Horiuchiego (1999) następującą formułą:

$$PI = \cos\theta = \frac{S(x') - S(x'')}{\sqrt{[S(x') - S(x'')]^2 + [x'' - x']^2}}, \quad (21)$$

gdzie: x' i x'' to odpowiednio wiek wyznaczony przez SC i QP , tj. $SC = S''(x')$ i $QP = S''(x'')$; θ – kąt pomiędzy wertykalną linią $x = x''$ oraz linią łączącą $(x', S(x'))$ z $(x'', S(x''))$.

Kąt θ leży na przekątnej łączącej punkt maksymalnego przyspieszenia spadku krzywej przeżycia (*maximum acceleration in attrition*) z punktem maksymalnej utraty prędkości (Cheung i in., 2005). Wraz z rosnącą rektangularyzacją, θ staje się mniejsze, a PI wzrasta (Wilmoth, Horiuchi, 1999).

Stopień wertykalizacji θ i θ^*

Cheung i in. (2005) proponują zastąpienie kąta θ wykorzystywanego w indeksie wydłużenia, kątem θ^* opierającym się na zgonach związanych z procesem starzenia się, po eliminacji umieralności niemowląt i umieralności przedwczesnej w teoretycznej krzywej przeżycia. Wskazują, iż θ^* jest łatwiejszy w interpretacji niż θ , w którym rozkład czasu trwania życia jest efektem łączenia zgonów niemowląt, przedwczesnych i związanych z procesem starzenia się przed modalną (przed punktem maksymalnego przyspieszenia spadku krzywej przeżycia). W nowym podejściu przekątna łączyłaby modalną z punktem maksymalnej utraty prędkości. θ^* przyjmowałby wartości od 0 stopni (wszyscy umierają w wieku M , a przekątna jest w pełni wertykalna) do 90 stopni (nikt nie umiera, a przekątna jest w pełni horyzontalna).

W miarę koncentracji zgonów związanych z procesem starzenia się wokół modalnej, wartość θ spada. Porównanie θ na empirycznej krzywej przeżycia z θ^* na krzywej teoretycznej pozwala zmierzyć, jak bardzo wertykalna byłaby krzywa po całkowitej eliminacji umieralności niemowląt i przedwczesnej. Cheung i in. w swoim opracowaniu stosują formułę:

$$\theta = \arctan \left| \frac{M - v_{\max d}}{Sv_M - Sv_{\max d}} \right|, \quad (22)$$

gdzie: M – modalny wiek w momencie zgonu; $v_{\max d}$ – wiek odpowiadający punktowi maksymalnej utraty prędkości na krzywej przeżycia; Sv_M – prawdopodobieństwo przeżycia do modalnej na teoretycznej krzywej przeżycia; $Sv_{\max d}$ – prawdopodobieństwo przeżycia do wieku odpowiadającego punktowi maksymalnej utraty prędkości na teoretycznej krzywej przeżycia.

Podejście maksymalnego wewnętrznego prostokąta MIRA

Najnowsza grupa miar rektangularyzacji została zaproponowana w opracowaniach Ebelinga i in. (2013, 2018) przedstawiających podejście maksymalnego wewnętrznego prostokąta (tłum. własne, *maximum inner rectangle approach – MIRA*). Rozróżnia ono rektangularyzację zewnętrzną i wewnętrzną, a każdej przypisuje inne wskaźniki.

Prostokąt zewnętrzny

Pierwsza miara – zewnętrzny prostokąt (*outer rectangle*) – oznaczona jest przez ω , gdyż determinuje go najstarsza grupa wieku w populacji ω oraz prawdopodobieństwo przeżycia na początku krzywej l_0 równe 1. Według Ebelinga i in. (2018):

$$\omega = \omega \cdot l_0. \quad (23)$$

W zależności od struktury umieralności, maksymalny wiek przesuwa się, tym samym zwiększając lub pomniejszając pole prostokąta. Wskaźnik informuje o potencjalnej maksymalnej liczbie przeżytych osobolat, gdyby wszyscy w populacji dożyli maksymalnego wieku ω i zmarli.

Wskaźnik prostokąta zewnętrznego

Dla porównania, według Ebelinga i in. (2018) faktyczną liczbę przeżytych osobolat w populacji wyznacza pole pod krzywą przeżycia i liczba ta determinuje średnią

długość trwania życia e_0 . Stosunek średniej do maksymalnej długości trwania życia służy do wskazania stopnia rektangularyzacji wewnętrznej. Wskaźnik prostokąta zewnętrznego (tłum. własne, *outer rectangle ratio* – *ORR*) jest zadany w opracowaniu wzorem:

$$ORR = \frac{\int_0^{\omega} l_a da}{\omega} = \frac{e_0}{\omega}, \quad (24)$$

gdzie: e_0 – oczekiwana długość życia noworodka (średnia długość życia); ω – maksymalna długość życia w populacji.

Z definicji *ORR* przyjmuje wartości od 0 do 1. Informuje o proporcji zaobserwowanych osobołat do maksymalnej potencjalnej liczby osobołat. Przykładowo, $ORR = 0,8$ oznacza, iż obecne warunki życia pozwalają populacji na wykorzystanie 80% ich maksymalnego potencjału.

Autorzy zwracają uwagę, iż w praktycznym zastosowaniu, wartość ω jest zastępowana wiekiem k , dla którego 1% pierwotnej kohorty wciąż żyje. Zauważyć zatem można, iż *ORR* staje się równoważny do opisanej w Wilmoth, Horiuchi (1999) miary ruchomego prostokąta.

Maksymalny prostokąt wewnętrzny

Dla rektangularyzacji wewnętrznej Ebeling i in. (2018) rozpatrują grupę prostokątów znajdujących się pod krzywą przeżycia, zdeterminowanych horyzontalnie przez wiek x i wertykalnie przez liczbę osób przeżywających do tego wieku l_x . Każdy wewnętrzny prostokąt IR_x (*inner rectangle*) mówi o liczbie równomiernie dzielonych osobołat dla określonego wieku i jest przez autorów wyznaczany za pomocą wzoru:

$$IR_x = x \cdot l_x. \quad (25)$$

Jak podają dalej, aby określić skalę rektangularyzacji, spośród wszystkich prostokątów pod krzywą należy wyznaczyć pierwszą pochodną wieku dla IR_x – zidentyfikowany zostaje wiek x^* , dla którego prostokąt pod krzywą ma największe pole powierzchni. Według Ebelinga i in., maksymalny wewnętrzny prostokąt (*maximum inner rectangle*) *MIR* informuje o aktualnej maksymalnej liczbie równomiernie dzielonych osobołat w populacji i jest zadany wzorem:

$$MIR = x^* \cdot l_{x^*}, \quad (26)$$

gdzie: $x^* = \frac{1}{\mu_x}$; μ_x – intensywność umieralności, $\mu_x > 0 \quad \forall x \in [0, \omega]$.

Wskaźnik prostokąta wewnętrznego

Ebeling i in. (2018) proponują również odniesienie MIR do e_0 , interpretowanego jako teoretyczna maksymalna liczba osobolat, które mogłyby być równomiernie rozdzielone w populacji. Wskaźnik wewnętrznego prostokąta (tłum. własne, *inner rectangle ratio*) IRR informuje o postępie populacji w osiągnięciu aktualnego potencjału równości długości życia, a dokładniej proporcji równomiernie dzielonych osobolat we wszystkich zaobserwowanych osobolatach. Ebeling i in. podają formułę:

$$IRR = \frac{MIR}{e_0}. \quad (27)$$

Przyjmuje on wartości od 0 do 1, np. $IRR = 0,8$ oznacza, iż aktualne warunki życia pozwalają populacji na wykorzystanie 80% jej aktualnego potencjału osobolat.

Wskaźnik rektangularyzacji całkowitej

W końcu, Ebeling i in. (2018) proponują połączenie ORR oraz IRR w jeden wskaźnik całkowitej rektangularyzacji TRR (tłum. własne, *total rectangle ratio*) mierzący równość długości życia osiągniętą w relacji do potencjalnego maksimum. Zadają go wzorem:

$$TRR = IRR \cdot ORR = \frac{MIR}{\omega}. \quad (28)$$

Przykładowo, $TRR = 0,8$ oznacza, iż aktualne warunki życia pozwalają populacji na osiągnięcie 80% swojego maksymalnego potencjału równości długości życia.

Krzywe P-sklejane

Ouellette i Bourbeau (2011) zauważają, iż wiele stosowanych w literaturze miar kompresji umieralności i rektangularyzacji krzywej przeżycia wymaga stosowania parametrycznych założeń co do struktury danych, które potencjalnie mogą wpływać na wyniki. Dlatego też autorzy proponują zastosowanie elastycznego, nieparametrycznego podejścia wygładzania danych dotyczących liczby zgonów i intensywności wymierania populacji opartego na krzywych P-sklejanych (*P-splines*), czyli krzywych B-sklejanych obarczonych karą (*B-splines with penalties*) stosowanego wcześniej w analizie umieralności przez cytowanych przez nich Currie, Durban, Eilers (2004) oraz Camarda (2008). Wśród zalet tej metody nad podejściem parametrycznym wymieniają: brak efektów brzegowych, efektywne działanie w przypadku grup wieku, w których nie odnotowano zgonów, brak zależności od pojedynczego, trudno

identyfikowalnego wieku o najwyższej liczbie zgonów, stabilność oceny trendów w czasie, łatwość implementacji oraz odczytu. Z kolei względem innych nieparametrycznych metod wygładzania, krzywe P-sklejane mają mieć zwięźlejszą formułę. Do oceny zmienności umieralności autorzy wykorzystali modalną oraz odchylenie standardowe powyżej modalnej z użyciem krzywych P-sklejanych. Parametry oszacowali za pomocą modelu regresji Poissona. Poniżej przedstawiono wzory ogólne (wszystkie formuły oraz dokładny opis procedury znajdują się w pracy Ouellette, Bourbeau, 2011). Wygładzona intensywność umieralności została zadana wzorem:

$$\hat{\mu}(x) = \exp(\mathbf{B}(x)\hat{\mathbf{a}}), \quad (29)$$

gdzie: \mathbf{B} – bazowa macierz B-sklejanych, $\hat{\mathbf{a}}$ – wektor oszacowanych współczynników dla każdej krzywej zawartej w \mathbf{B} .

Wygładzona krzywa przeżycia:

$$\hat{S}(x) = \exp\left(-\int_0^x \hat{\mu}(t) dt\right). \quad (30)$$

Odpowiednio, wygładzony rozkład gęstości prawdopodobieństwa, a więc rozkład wieku w momencie zgonu:

$$\hat{f}(x) = \hat{\mu}(x)\hat{S}(x). \quad (31)$$

Modalna wieku w momencie zgonu, oszacowana za pomocą wygładzonego rozkładu:

$$\hat{M} = \max_x \hat{f}(x). \quad (32)$$

Odchylenie standardowego wieku w momencie zgonu powyżej modalnej:

$$\widehat{SD(M+)} = \sqrt{\frac{\int_{\hat{M}}^{\omega} (x - \hat{M})^2 \hat{f}(x) dx}{\int_{\hat{M}}^{\omega} \hat{f}(x) dx}}, \quad (33)$$

gdzie: ω – najwyższy zaobserwowany wiek w populacji.

Na podstawie cytowanej wyżej literatury i własnych wniosków, przygotowano tabelę porównawczą miar i wskaźników wraz z ich klasyfikacją względem etapów (horyzontalizacja, wertykalizacja i ekspansja długowieczności) lub typu rektangularyzacji (zewnętrzna, wewnętrzna, absolutna, relatywna), jednostki i zachowania wartości względem zmian zachodzących w kompresji-rektangularyzacji (tabela 1). W przypadku nieodnalezienia w polskiej literaturze odpowiedników angielskich nazw wskaźników, zgodnie z intuicją zaproponowano tłumaczenia własne.

Tabela 1. Zestawienie miar i wskaźników rektangularyzacji wraz z ich klasyfikacją
 Table 1. Summary of rectangularization measures and indicators and their classification

Nazwa Name	Oznaczenie Symbol	Jednostka Unit	Kategoria Category	Zmiana względem rektangularyzacji Change in relations to rectangularization
Rozstęp kwartyłowy/Interquartile range	IQR	Lata	Wertykalizacja	Wraz ze spadkiem dyspersji wieku w momencie zgonu, wartość IQR spada
Entropia tablic trwania życia (H Keyfitz)/ Entropy of the life table (Keyfitz's H)	H_x	Wartości od 0 do 1	Wertykalizacja	Wraz ze spadkiem dyspersji wieku w momencie zgonu, wartość H_x maleje
Normalne trwanie życia/ Normal life duration	M	Lata	Centralny wskaźnik długowieczności	Wraz ze wzrostem ekspansji długowieczności, wartość M wzrasta
Odchylenie standardowe/ Standard deviation	σ_d	Lata	Wertykalizacja i rektangularyzacja (miara absolutna)	Wraz ze spadkiem dyspersji wieku w momencie zgonu, wartość σ_d spada
Współczynnik zmienności/ Coefficient of variation	CV	Procenty	Rektangularyzacja (miara relatywna)	Wraz ze wzrostem rektangularyzacji w sensie relatywnym, wartość CV spada
Odchylenie standardowe powyżej modalnej/ Standard deviation above the mode	SDM(M ₁)	Lata	Wertykalizacja	Wraz ze spadkiem dyspersji wieku w momencie zgonu osób, które dożyły co najmniej do M, wartość SDM(M ₁) spada
Cztery odchylenia standardowe powyżej modalnej/ Four standard deviations above the mode	M + 4SDM(M ₁)	Lata	Ekspansja długowieczności	Wraz ze wzrostem ekspansji długowieczności, wartość M + 4SDM(M ₁) spada
Stoień horyzontalizacji β / Degree of horizontalization β	β	Od 0° do 90°	Horyzontalizacja	Wraz ze wzrostem horyzontalizacji, wartość β spada
Współczynnik Giniego (Współczynnik koncentracji)/ Gini coefficient	G_0	Wartości od 0 do 1	Inna	Wraz ze spadkiem dyspersji wieku w momencie zgonu, wartość G_0 spada
Absolutny współczynnik koncentracji/ Average inter-individual difference	G_0^{abs}	Lata	Inna	Wraz ze spadkiem dyspersji wieku w momencie zgonu, wartość G_0^{abs} spada
Krzywa Lorenza/Lorenz curve	F_x	Wyrażenie graficzne	Inna	Graficznie: wraz ze spadkiem dyspersji wieku w momencie zgonu, krzywa Lorenza zbliża się do przekątnej
Rodzina wskaźników C/C-family	C10, C25, C50, C90	Lata	Wertykalizacja	Wraz ze spadkiem dyspersji wieku w momencie zgonu, wartości C kolejno spadają
Stały prostokąt/Fixed rectangle	FR	Od 0 do 1 lub procenty	Rektangularyzacja (zewnętrzna)	Wraz ze wzrostem rektangularyzacji, wartość FR wzrasta
Ruchomy prostokąt/Moving rectangle	MR	Od 0 do 1 lub procenty	Rektangularyzacja (zewnętrzna)	Wraz ze wzrostem rektangularyzacji, wartość MR wzrasta

cd. tabeli 1

Nazwa Name	Oznaczenie Symbol	Jednostka Unit	Kategoria Category	Zmiana względem rektangularyzacji Change in relations to rectangularization
Indeks rektangularyzacji/ Rectangularity index	R	Od 0 do 1 lub procenty	Rektangularyzacja (zewnątrzna)	Wraz ze wzrostem rektangularyzacji, wartość R wzrasta
Indeks długowieczności/Longevity index	t_q	Lata	Ekspansja długowieczności	Wraz ze wzrostem ekspansji długowieczności, wartość t_q wzrasta
Warunkowe oczekiwane dalsze trwanie życia/ Conditional life expectancy	$CLE_{t_0,a}$	Lata	Rektangularyzacja i ekspansja długowieczności	Wraz ze wzrostem rektangularyzacji i/lub ekspansji długowieczności, wartość $CLE_{t_0,a}$ wzrasta
Najwyższy spadek/Fastest decline (maximum, greatest downward slope)	FD	Lata lub procenty	Wertykalizacja	Wraz ze spadkiem dyspersji wieku w momencie zgonu, wartość FD wzrasta
Minimalna krzywizna/ Minimum curvature (sharpest corner)	SC	Lata	Inna	Wraz ze wzrostem rektangularyzacji, wartość SC wzrasta
Maksymalna krzywizna/ Maximum curvature (quickest plateau)	QP	Lata	Inna	Wraz ze wzrostem rektangularyzacji, wartość QP wzrasta
Indeks wydłużenia/Prolate index	PI	Wartości od 0 do 1	Wertykalizacja	Wraz ze spadkiem dyspersji wieku w momencie zgonu, wartość PI wzrasta
Stoień wertykalizacji θ i θ^* / Degree of verticalization θ, θ^*	θ	Od 0° do 90°	Wertykalizacja	Wraz ze spadkiem dyspersji wieku w momencie zgonu, wartość θ spada
Zewnętrzny prostokąt/Outer rectangle	ω	Osobolata	Rektangularyzacja (zewnątrzna)	Wraz ze wzrostem długowieczności jednostek w populacji, wartość ω wzrasta
Wskaźnik zewnętrzznego prostokąta/ Outer rectangle ratio	ORR	Od 0 do 1 lub procenty	Rektangularyzacja (zewnątrzna)	Wraz ze wzrostem rektangularyzacji, wartość ORR wzrasta
Maksymalny prostokąt wewnętrzny/ Maximum inner rectangle	MIR	Osobolata	Rektangularyzacja (wewnętrzna)	Wraz ze wzrostem rektangularyzacji, wartość MIR wzrasta
Wskaźnik wewnętrzznego prostokąta/ Inner rectangle ratio	IRR	Od 0 do 1 lub procenty	Rektangularyzacja (wewnętrzna)	Wraz ze wzrostem rektangularyzacji, wartość IRR wzrasta
Wskaźnik rektangularyzacji całkowitej/ Total rectangle ratio	TRR	Od 0 do 1 lub procenty	Rektangularyzacja	Wraz ze wzrostem rektangularyzacji, wartość TRR wzrasta
Krzywe P-sklejane/P-splines	-	-	-	Analogicznie do wskaźników wyznaczonych parametrycznie

Źródło: Opracowanie własne.
Source: Own elaboration.

Przegląd badań empirycznych dla krajów europejskich

Przegląd empirycznych badań dotyczących koncepcji kompresji umieralności i rektangularyzacji krzywej przeżycia oraz badań korzystających z narzędzi pomiaru przedstawionych w tym artykule, pozwolił na ustalenie, iż dotychczasowa literatura polsko- i anglojęzyczna obejmuje jedynie 11 krajów europejskich: Szwecję (Wilmoth, Horiuchi, 1999; Kannisto, 2000; Canudas-Romo, 2008, 2010; Thatcher i in., 2010; Yue, 2012; Rossi, Rousson, Paccaud, 2013; Ebeling i in., 2013; Schalkwijk, Koopman, Ghariq, de Beer, van Bodegom, Westendorp, 2016; Ebeling i in., 2018), Francję (Hill, 1993; Kannisto, 2000; Robine, 2001; Kannisto, 2007; Canudas-Romo, 2008; Thatcher i in., 2010; Ouellette, Bourbeau, 2011; Ebeling i in., 2013; Rossi i in., 2013; Schalkwijk i in., 2016), Szwajcarię (Paccaud, Pinto, Marazzi, Mili, 1998; Cheung, Robine, Paccaud, Marazzi, 2009; Kannisto, 2000; Thatcher i in., 2010; Rousson, Paccaud, 2010; Rossi i in., 2013; Schalkwijk i in., 2016), Wielką Brytanię, chociaż część badań dotyczy jedynie obszaru Anglii i Walii (Hill, 1993; Kannisto, 2000; Canudas-Romo, 2008; Thatcher i in., 2010; Rossi i in., 2013; Schalkwijk i in., 2016), Holandię (Nusselder, Mackenbach, 1996; Nusselder, 2007; Kannisto, 2000; Rossi i in., 2013; Engelaer, Bodegom, Kirkwood, Westendorp, 2014), Włochy (Canudas-Romo, 2008; Thatcher i in., 2010; Rossi i in., 2013; Ebeling i in., 2018), Finlandię (Kannisto, 2000, 2007; Rossi i in., 2013), Danię (Rossi i in., 2013; Ebeling i in., 2018), Norwegię (Rossi i in., 2013), Hiszpanię (Debón, Martínez-Ruiz, Montes, 2012) i Polskę (Wróblewska, 2017). Widoczna jest dysproporcja w liczbie literatury poświęconej poszczególnym krajom europejskim, w tym pojedyncze źródła dla Norwegii, Hiszpanii i Polski. Warto również zaznaczyć, że niektóre badania miały postać zbiorczych analiz dla kilku krajów, prezentujących wyniki wyłącznie w formie przybliżonych wykresów, uniemożliwiających wyczerpującą analizę struktur umieralności w obrębie jednej populacji. Szczegółowe opisy metodologii, wyniki i wnioski są dostępne w cytowanych źródłach, natomiast dalej przedstawiono rezultaty zbiorczego przeglądu.

Mimo indywidualnych wzorców przemian umieralności w 11 krajach Europy, większość autorów jest zgodna co do ogólnych wniosków dotyczących rektangularyzacji krzywej przeżycia. Kompresję umieralności uznano za istotny wzorzec przemian demograficznych w poszczególnych krajach, w szczególności w połowie XX wieku. Istnieje zgodność również co do przewidywań, iż kraje, w których eliminacja umieralności przedwcześnie zajdzie później, powtórzą scenariusz tych, w których rektangularyzacja jest na bardziej zaawansowanym etapie lub osiągnęła pewien limit (tymczasowy lub przypuszczalnie trwały). W większości krajów, za wyjątkiem

tymczasowych wahań, kolejne etapy przemian były osiągnięte szybciej przez kobiety niż mężczyzn, a osiągnięte przez nie wartości miar i wskaźników wyższe.

Mniej jednoznaczne wnioski są wysuwane pod względem przyszłych przemian umieralności. Podczas gdy niektóre źródła przewidują dalszy postęp kompresji umieralności i rektangularyzacji krzywej przeżycia, inne skłaniają się ku koncepcji opóźnienia umieralności. Potrzebne będą dalsze analizy długookresowe oraz dla większej liczby krajów, aby stwierdzić, czy jeden scenariusz zacznie być najczęściej wskazywany.

Tabela 2. Miary rektangularyzacji według liczby źródeł naukowych, w których zostały wykorzystane

Table 2. Measures of rectangularization by the number of scientific sources which used them

Miara rektangularyzacji/ /Measures of rectangularization	Liczba źródeł/ /Number of sources	Miara rektangularyzacji/ /Measures of rectangularization	Liczba źródeł/ /Number of sources
Normalne trwanie życia	12	Maksymalny prostokąt wewnętrzny	2
Odchylenie standardowe powyżej modalnej	5	Współczynnik zmienności	1
Rodzina wskaźników C	5	Krzywe P-sklejane	1
Rozstęp kwartylowy	4	Absolutny współczynnik koncentracji	1
Entropia tablic trwania życia	4	Stały prostokąt	1
Indeks rektangularyzacji	4	Najszybszy spadek	1
Odchylenie standardowe	3	Wskaźnik rektangularyzacji całkowitej	1
Indeks wydłużenia	3	Minimalna krzywizna	1
Warunkowe oczekiwane dalsze trwanie życia	3	Maksymalna krzywizna	1
Ruchomy prostokąt oraz wskaźnik prostokąta zewnętrznego	3	Wskaźnik prostokąta wewnętrznego	1
Współczynnik Giniego	2	Stopień wertykalizacji	0
K odchyłeń standardowych powyżej modalnej	2	Stopień horyzontalizacji β	0
Krzywa Lorenza	2	Prostokąt zewnętrzny	0

Źródło: Opracowanie własne.

Source: Own elaboration.

Jeśli chodzi o narzędzia pomiaru stosowane w zebranych źródłach, przede wszystkim jest widoczna dysproporcja w liczbie badań wykorzystujących poszczególne z 26 wyróżnionych w tym artykule miar i wskaźników (tabela 2). W empirycznej analizie struktury przemian umieralności w Europie miary dyspersji wieku w momencie zgonu oraz centralne wskaźniki długowieczności przeważają nad miarami odnoszącymi się bezpośrednio do „prostokątnego” kształtu krzywej przeżycia. W źródłach dominuje wykorzystanie normalnego trwania życia, a względną popularność mają

miary, takie jak $SDM(M+)$, C , IQR , H czy R . Warto zaznaczyć, iż na przykład stopień horyzontalizacji β został wykorzystany wyłącznie w pracy, w której został zaproponowany (Cheung i in., 2005, na danych dla Hongkongu), a miara prostokąta zewnętrznego została opisana wyłącznie teoretycznie (Ebeling i in., 2013, 2018).

Różnice w metodzie dotyczyły również zastosowania przekrojowych lub kohortowych tablic trwania życia, zakresu wieku obejmowanego analizą oraz sposobem przygotowania zbioru surowych danych. W pierwszym przypadku w literaturze przeważało zastosowanie tablic przekrojowych. Chociaż syntetyczny charakter analizowanych kohort bywał krytykowany, to tylko one pozwalają na analizę najnowszych zmian w umieralności. Jeśli chodzi o zakres wieku, wątpliwości dotyczyły przede wszystkim uwzględniania w badaniu dzieci, niemowląt i długowiecznych jednostek, jednak nie stwierdzono dominującego rozwiązania, a źródła odnotowywały zmiany na różnych wyznaczonych arbitralnie przedziałach wieku. Równocześnie Ebeling i in. (2013) postulują, iż wiarygodna analiza rektangularyzacji powinna uwzględniać pełną skalę wieku, aby uchwycić kumulatywny charakter przeżycia i różnorodne struktury poprawy umieralności w czasie, jak również nie przywiązywać się do sztywnych granic wieku, które w dziedzinie umieralności mogą się szybko zmieniać. W końcu, poszczególne źródła korzystały z danych dyskretnych lub wygładzanych z pomocą różnych metod (warto tutaj zauważyć, że tylko w jednej pracy zastosowano krzywe P-sklejane) oraz z pełnych lub skróconych tablic trwania życia. Różne sposoby przygotowania danych do analizy mogą być źródłem różnic w wynikach dla tej samej populacji w tym samym okresie, dlatego też czasowe wahania czy odstępstwa pomiędzy wartościami wskaźników należy traktować ostrożnie, jak również kierować się intuicją i obserwacją długoterminowych trendów.

Przykład Francji

Historia prowadzenia wiarygodnych statystyk dotyczących umieralności we Francji sięga 1806 roku, dlatego też jest to jeden z dwóch krajów europejskich (obok Szwecji) o najwyższej liczbie empirycznych badań rektangularyzacji. Prawie wszystkie zgromadzone prace dla tego kraju korzystają z przekrojowych tablic trwania życia (wyjątkiem jest Hill, 1993), w większości pochodzących z Human Mortality Database (wyjątkami są Hill, 1993; Robine, 2001 i Kannisto, 2000, 2007). Lata analizy różnią się pomiędzy źródłami, jednak ich wspólny zakres pokrywa większość XX wieku – okres, w którym najdynamiczniej rozwijało się zjawisko rektangularyzacji. Również otrzymane wartości mogą wahać się ze względu na rodzaj tablic trwania życia (pełne lub skrócone) oraz metodę wygładzania danych, dlatego uwagę poświęcono przede wszystkim wnioskowi ogólnym.

Normalne trwanie życia (bez podziału na płeć) we Francji wzrastało na przestrzeni ostatniego wieku niemal linearnie, przyspieszając w jego drugiej połowie, a jego odchylenie standardowe malało (Robine, 2001; Canudas-Romo, 2008; Thatcher i in., 2010). Jednak dla mężczyzn w badanym okresie wahania wartości M były większe niż dla kobiet i osiągnęły stabilizację dopiero w połowie lat 70. XX wieku (Ouellette, Bourbeau, 2011). W ciągu stu lat dla obu płci modalna wzrosła łącznie o 12 lat, osiągając ok. 83,5 roku dla mężczyzn i blisko 89 lat dla kobiet w 2004 roku (Thatcher i in., 2010). Równocześnie odchylenie standardowe powyżej modalnej niejednostajnie malało, stabilizując spadek w latach 50. dla kobiet i 70. dla mężczyzn (Ouellette, Bourbeau, 2011). Około połowy XX w. szybkość spadku $SDM(M+)$ zmalała dla mężczyzn i przyspieszyła dla kobiet (Thatcher i in., 2010). Wartości $SDM(M+)$ dla obu płci zmalały ok. 2 lata w badanym okresie, osiągając na początku lat 2000 ok. 6,5 roku dla mężczyzn oraz poniżej 6 lat dla kobiet (Thatcher i in., 2010; Ouellette, Bourbeau, 2011).

W perspektywie wymiarów rektangularyzacji, Robine (2001) stwierdza zajście w XX w. niemal pełnej horyzontalizacji krzywej przeżycia dla osób w wieku poniżej 30. roku życia, jednak wyłącznie na podstawie obserwacji wizualnej. Na etapie kompresji, określonym jako wertykalizacja, wartość IQR istotnie zmalała do 13,9 roku dla kobiet w połowie lat 90. (dla obu płci zatrzymując się lub znacznie wyhamowując), aczkolwiek przedział ten konsekwentnie przesunął się ku wyższym grupom wieku (Robine, 2001). Jednocześnie, wskazywany przez Kannisto (2000) jako lepszy, wskaźnik $C50$ nie ujawnił tak dużej kompresji umieralności, od początku osiągając niższe wartości (w latach 90. XX wieku 12,5 roku dla kobiet) (Robine, 2001). Na większym „wycinku” zgonów w populacji (obejmującym 90% zgonów), wskaźnik $C90$ wykazał znaczną kompresję umieralności dla kobiet w drugiej połowie XX wieku, zawężając swój przedział z 51 lat do 37 lat i wskazując tym samym, iż rektangularyzacja jest w późnym stadium (Kannisto, 2000).

Dla Francji zbadano również zmianę wartości miary najszybszego spadku FD – na przestrzeni wieku wzrosła ona z 1,7% do 3,3% dla mężczyzn i z 1,9% do 4,5% dla kobiet, dla obu płci spowalniając w latach 50. XX wieku (Robine, 2001). W tej samej pracy odnotowano przesunięcie punktów minimalnej i maksymalnej krzywizny, odpowiednio z 63 lat do 82 lat i z 83 lat do 95 lat (dla kobiet). Ostatnie z badań odnoszące się do etapu wertykalizacji (Hill, 1993) korzysta z miary entropii H_{30} , jednak nie potwierdza kompresji umieralności, mimo wzrostu średniego trwania życia. W końcu, dla bezpośrednich miar rektangularyzacji, w pierwszej połowie XX wieku zaobserwowano we Francji wzrost wartości stałego i ruchomego prostokąta (FR z 0,4 do 0,73 oraz MR z 0,46 do 0,75 dla mężczyzn; FR z 0,43 do 0,73 oraz MR z 0,49 do 0,81 dla kobiet), równocześnie stwierdzając, iż pierwsza z tych miar

przewartościowuje zjawisko (Robine, 2001). Wzrost rektangularyzacji zewnętrznej i wewnętrznej do połowy lat 50. XX wieku potwierdza indeks rektangularyzacji, warunkowe oczekiwane dalsze trwanie życia oraz maksymalny prostokąt wewnętrzny (Kannisto, 2007; Ebeling i in., 2013; Rossi i in., 2013; Schalkwijk i in., 2016). Następnie od lat 50., we wzroście średniego trwania życia, dla całej skali wieku większy udział zaczęła mieć ekspansja długowieczności (Ebeling i in., 2013). W grupie osób 50+ Rossi i in. (2013) wskazują niewielką dominację znaczenia długowieczności, a Schalkwijk i in. (2016) dalszą przewagę rektangularyzacji, jednak ponieważ źródła te korzystają z tych samych danych i miar, różnica może wynikać z arbitralnego wyboru innej wartości Q . Dla osób sędziwych (80+) wartość R najsilniej wzrosła w drugiej połowie wieku – z 33% do 43% (dla porównania, dla pełnej skali wieku osiągnęła 80%).

Podsumowując otrzymane wyniki, badania empiryczne dla Francji, chociaż wykorzystują inne narzędzia, potwierdzają, iż pierwsza połowa XX wieku wiązała się z najdynamiczniejszym rozwojem rektangularyzacji oraz przeniesieniem redukcji umieralności z wieku dziecięcego na dorosły (choć zmiany te zachodziły z pewnym opóźnieniem – w kolejnych dziesięcioleciach – i w mniejszym zakresie dla mężczyzn w porównaniu do kobiet). Od lat 50. XX wieku zaczęła zachodzić istotna kompresja umieralności w grupie osób najstarszych, tymczasem miary obejmujące pełną skalę wieku zaczęły wykazywać dominujące znaczenie ekspansji długowieczności. Pod koniec wieku proces zwolnił dla obu płci i autorzy są zgodni co do tego, że będzie on jeszcze przez jakiś czas kontynuowany (przynajmniej dla mężczyzn), jednak w dalszej perspektywie sugerują możliwość opóźnienia umieralności, a nawet dekompresję.

Od strony metod stosowanych w analizie zmian w umieralności dla Francji problem porównawczy stwarzają różne okresy objęte analizą, jednak w tym przypadku zastosowanie różnorodnych miar i wskaźników nie doprowadziło autorów do sprzecznych wniosków, a raczej do ujęcia różnorodnych perspektyw pomiaru kompresji umieralności i rektangularyzacji krzywej przeżycia. Zasada ta oczywiście nie zawsze może być spełniona, dlatego też w doborze narzędzi pomiaru zjawiska należy się kierować swoją najlepszą intuicją. Szczególnie dla krajów niedoreprezentowanych w dotychczasowych badaniach, potwierdzenie tutaj znajduje zalecenie niniejszego artykułu, aby nie ograniczać analizy do powszechnie eksploatowanych miar dyspersji, a uzupełniać ją dedykowanymi miarami rektangularyzacji krzywej przeżycia. Mając na uwadze fakt, iż Francja jest krajem o stosunkowo wysokiej liczbie badań w tym zakresie, łatwiejszym zadaniem jest stwierdzenie, które wahania i odstępstwa wartości od trendu są spowodowane np. metodą przygotowania danych do analizy. Dlatego też dalsze badania dla innych populacji na różnorodnych miarach pozwolą na pełniejszy opis zjawiska, a także na określenie istotnych i nieistotnych różnic w wynikach i interpretacjach oraz potencjalne sformułowanie wspólnych wniosków.

Zakończenie

Przeprowadzony przegląd literatury teoretycznej oraz empirycznej pozwolił na zidentyfikowanie definicji, klasyfikacji oraz szerokiego zakresu narzędzi pomiaru rektangularyzacji krzywej przeżycia, jak również dalszego potencjału badawczego. Badania dotyczące Francji posłużyły za wiarygodny przykład możliwego scenariusza ewolucji struktur wieku w momencie zgonu. W pracach naukowych koncepcja kompresji–rektangularyzacji została uznana za ważny model przemian umieralności XX wieku, jak również punkt wyjścia analiz procesów najnowszych i przyszłych, bowiem jest ona silnie osadzona w empirycznych zastosowaniach. Badania w tym zakresie warto kontynuować, zwracając szczególną uwagę na luki zidentyfikowane w drodze niniejszego przeglądu.

Sugerowane jest przeprowadzenie szerszej analizy dla Polski – prawie nieobecnej w literaturze naukowej – gdyż jest ona w relatywnie wczesnym stadium zjawiska, a identyfikacja prawdopodobnego scenariusza dalszych przemian jest kluczowa dla polityki społecznej i gospodarczej. Co więcej, w dalszych analizach jest proponowane mniejsze przywiązanie do znanych narzędzi pomiaru i eksploracja miar oraz wskaźników dedykowanych zjawisku (w szczególności testowanie efektywności tych opisanych wyłącznie teoretycznie bądź wykorzystanych jedynie w pracach, w których zostały zaproponowane). W końcu, przyjrzenie się nieparametrycznym metodom wygładzania danych o umieralności, np. krzywym P-sklejanym.

Bibliografia

- Börger, M., Genz, M., Ruß, J. (2018), Extension, Compression, and Beyond: A Unique Classification System for Mortality Evolution Patterns, *Demography*, 55(4), s. 1343–1361, <https://doi.org/10.1007/s13524-018-0694-3> (dostęp: 17.10.2018).
- Bell, F.C., Miller, M.L. (2005). Life tables for the United States social security area, *Social Security Administration Publications*, 3, https://www.ssa.gov/oact/NOTES/pdf_studies/study120.pdf (dostęp: 10.02.2019).
- Camarda, C.G. (2008). *Smoothing methods for the analysis of mortality development*. Rozprawa doktorska. Madrid: Universidad Carlos III de Madrid, Department of Statistics.
- Canudas-Romo, V. (2008). The modal age at death and the shifting mortality hypothesis, *Demographic Research*, vol. 19, article 30, s. 1179–1204.
- Canudas-Romo, V. (2010). Three measures of longevity: time trends and record values, *Demography*, 47(2), s. 299–312.

- Cheung, S.L.K., Robine, J.M., Jow-Ching Tu, E., Caselli, G. (2005). Three dimension of the survival curve: horizontalization, verticalization, and longevity extension, *Demography*, 42(2), s. 243–258, <https://link.springer.com/content/pdf/10.1353/dem.2005.0012.pdf> (dostęp: 13.09.2018).
- Cheung, S.L.K., Robine, J.M., Paccaud, F., Marazzi, A. (2009). Dissecting the compression of mortality in Switzerland, 1876–2005, *Demographic Research*, vol. 21, article 19, s. 569–598.
- Comfort, A. (1979). *The Biology of Senescence*. New York: Elsevier.
- Currie, I.D., Durban, M., Eilers, P.H.C. (2004). Smoothing and forecasting mortality rates, *Statistical Modelling*, 4(4), s. 279–298. DOI:10.1191/1471082X04st080oa (dostęp: 15.01.2019).
- Debón, A., Martínez-Ruiz, F., Montes, F. (2012). Temporal evolution of mortality indicators: application to Spanish data, *North American Actuarial Journal*, 16(3), s. 364–377.
- Eakin, T., Witten, M. (1995). How Square Is the Survival Curve of a Given Species?, *Experimental Gerontology*, 30(1), s. 33–64.
- Ebeling, M., Rau, R., Baudisch, A. (2013). *The maximized inner rectangle approach (MIRA): disentangling rectangularization*, https://iusp.org/sites/default/files/event_call_for_papers/MIRAEbelingRauBaudisch.pdf (dostęp: 20.12.2018).
- Ebeling, M., Rau, R., Baudisch, A. (2018). Rectangularization of the survival curve reconsidered: The maximum inner rectangle approach, *Population Studies*, vol. 72, no. 3, s. 369–379, doi.org/10.1080/00324728.2017.1414299 (dostęp: 14.12.2018).
- Engelaer, F.M., van Bodegom, D., Kirkwood, T.B.L., Westendorp, R.G.J. (2014). *Limits to the compression of human mortality*. W: *Compression and plasticity of old-age mortality* (s. 63–76), F.M. Engelaer (Ed.). Leiden: Leiden University.
- Fries, J.F. (1980). Aging, Natural Death and the Compression of Morbidity, *New England Journal of Medicine*, 303(3), s. 130–135.
- Fries, J.F., Crapo, L.M. (1981). *Vitality and Aging: Implications of the Rectangular Curve*. Reprint, Pine Forge Press, 2006, s. 43–50.
- Hill, G. (1993). The entropy of the survival curve: an alternative measure, *Canadian Studies in Population*, 20(1), s. 43–57.
- Kannisto, V. (2000). Measuring the Compression of Mortality, *Demographic Research*, vol. 3, article 6, 10.4054/DemRes.2000.3.6 (dostęp: 15.09.2018).
- Kannisto, V. (2007). *Central and dispersion indicators of individual life duration: New methods*. W: *In Human longevity, individual life duration, and the growth of the oldest-old population*, Vol. 4 (s. 111–129), J.M. Robine, E.M. Crimmins, S. Horiuchi, Y. Zeng (Eds.). Springer: Dordrecht.
- Manton, K.G., Tolley, H.D. (1991). Rectangularization of the Survival Curve: Implications of an Ill-Posed Question, *Journal of Aging and Health*, 3(2), s. 172–193.
- Myers, G.C., Manton, K.G. (1984). Compression of Mortality: Myth or Reality?, *The Gerontologist*, 24(4), s. 346–353.

- Nagnur, D. (1986). Rectangularization of the survival curve and entropy: the Canadian experience, 1921–1981, *Canadian Studies in Population*, 13(1), s. 83–102.
- Nusselder, W.J., Mackenbach, J.P. (1996). Rectangularization of the survival Curve in the Netherlands, 1950–1992, *The Gerontologist*, vol. 36, no. 6, s. 773–781.
- Nusselder, W.J. (2007). *Recent trends in life expectancy and rectangularisation of the survival curve at advanced ages in the Netherlands*. W: *In Human longevity, individual life duration, and the growth of the oldest-old population*. Vol. 4 (s. 131–146), J.M. Robine, E.M. Crimmins, S. Horiuchi, Y. Zeng (Eds.). Springer: Dordrecht.
- Ouellette, N., Bourbeau, R. (2011). Changes in the age-at-death distribution in four low mortality countries: A nonparametric approach, *Demographic Research*, vol. 25, article 19, s. 595–628.
- Paccaud, F., Pinto, C.S., Marazzi, A., Mili, J. (1998). Age at death and rectangularization of the survival curve: trends in Switzerland, 1969–1994, *Journal of Epidemiology & Community Health*, 52(7), s. 412–415.
- Pearl, R. ([1923] 1940). *Introduction to Medical Biometry and Statistics*, 3rd ed. Philadelphia: Saunders.
- Randolph, J.J. (2009). A Guide to Writing the Dissertation Literature Review, *Practical Assessment, Research & Evaluation*, 14(13), s. 1–13, <http://pareonline.net/getvn.asp?v=14&n=13> (dostęp: 15.06.2018).
- Robine, J.M. (2001). Redefining the Stages of the Epidemiological Transition by a Study of the Dispersion of Life Spans: The Case of France, *Population: An English Selection*, 13(1), s. 173–194.
- Rossi, I.A., Rousson, V., Paccaud, F. (2013). The contribution of rectangularization to the secular increase of life expectancy: an empirical study, *International Journal of Epidemiology*, 42(1), s. 250–258.
- Rousson, V., Paccaud, F. (2010). A set of indicators for decomposing the secular increase of life expectancy, *Population Health Metrics*, 8:18, s. 1–9. <http://www.pophealthmetrics.com/content/8/1/18> (dostęp: 3.01.2019).
- Schalkwijk, F.H., Koopman, J.J.E., Ghariq, E., de Beer, J.A.A., van Bodegom, D., Westendorp, R.G.J. (2016). Disentangling rectangularization and life span extension with the moving rectangle method, *Annals of Epidemiology*, 26(3), s. 218–221.
- Shkolnikov, V. M., Andreev, E.E., Begun, A.Z. (2003). Gini coefficient as a life table function: computation from discrete data, decomposition of differences and empirical examples, *Demographic Research*, vol. 8, article 11, s. 305–358.
- Siegel, J.S. (2012). *The Life Table*. W: *The Demography and Epidemiology of Human Health and Aging* (s. 135–216), J.S. Siegel (Ed.). New York: Springer, <https://doi.org/10.1007/978-94-007-1315-4> (dostęp: 20.12.2018).
- Szukalski, P. (2008). *Ewolucja umieralności i niepełnosprawności w Polsce w świetle koncepcji rektangularyzacji krzywej przeżycia*. W: *Starzenie się ludności Polski – między demografią*

- a gerontologią społeczną* (s. 89–123), J.T. Kowaleski, P. Szukalski (red.). Łódź: Wydawnictwo Uniwersytetu Łódzkiego.
- Thatcher, A.R., Cheung, S.L.K., Horiuchi, S., Robine, J.M. (2010). The compression of deaths above the mode, *Demographic Research*, vol. 22, article 17, s. 505–538.
- Upton, A.C. (1977). *Pathology. W: Handbook of Biology of Aging* (s. 513–535), C.E. Finch, L. Hayflick (Eds.). New York: Van Nostrand Reinhold.
- Wilmoth, J.R., Horiuchi, S. (1999). Rectangularization revisited: variability of age at death within human populations, *Demography*, 36(4), s. 475–495.
- Wróblewska, W. (2009). Teoria przejścia epidemiologicznego oraz fakty na przełomie wieków w Polsce, *Studia Demograficzne*, 1(155), s. 110–159.
- Wróblewska, W. (2017). Pomiar dyspersji wieku w momencie zgonu. Przyczynek do analizy kompresji umieralności w Polsce, *Studia Demograficzne*, 1(171), s. 3–25.
- Yue, J.C. (2012). Mortality Compression and Longevity Risk, *North American Actuarial Journal*, 16(4), s. 434–448.

Rectangularization of the survival curve: the state of knowledge and analysis of the results

Abstract

This article is a result of a methodological literature review concerning the compression of mortality and rectangularization of the survival curve concepts. It aims to identify the current state of knowledge – key definitions, existing tools of measurement and analysis of empirical research conducted so far in Europe. The process of gathering and selecting scientific literature is precisely described so that one can easily understand the obtained knowledge synthesis and possibly improve further research. The first part of this paper includes definitions of the rectangularization of the survival curve, its dimensions, and related terminology. Then, 26 measures and indicators of the phenomenon, found in existing scientific literature, are described individually and gathered in a comparative table. Finally, the results of reviewing empirical research of 11 European countries are presented: Sweden, France, Switzerland, Great Britain, the Netherlands, Italy, Finland, Denmark, Norway, Spain, and Poland. The results are further discussed on the example of France. The analysis shows that some of the rectangularization measures are still rarely used empirically, some being only theoretically formulated. Moreover, these studies have small to none representation of some European countries. As a result of this literature review, new interesting paths for further research are formulated.

Keywords: rectangularization of the survival curve, mortality compression, dispersion of age at death, modal age at death, maximum life span