

*Lech Bolesławski*

## MODYFIKACJA METODY EKSTRAPOLACYJNEJ COALE'A-KISKER DLA TABLIC TRWANIA ŻYCIA

### METODA COALE'A-KISKER I JEJ MODYFIKACJA

Metoda zaproponowana przez Ansleya Coale'a i Ellen Kisker opiera się na obserwacji, że współczynniki zgonów powyżej 85 lat rosną z wiekiem w tempie coraz wolniejszym (Coale, Kisker, 1990). Jej autorzy założyli, że powyżej wieku 85 lat tzw. wykładnicza stopa zmian współczynników zgonów  $m_x$ , zdefiniowana jako

$k_x = \ln\left(\frac{m_x}{m_{x-1}}\right)$ , maleje liniowo wraz z wiekiem:

$$k_x = k_{85} + s * (x - 85) \quad (1)$$

Można wykazać, że przy tym założeniu współczynniki zgonów są funkcją wykładniczo-kwadratową postaci:

$$m_x = \exp\{ax^2 + bx + c\} \quad (2)$$

Dostępne w niektórych krajach dane dla najstarszych grup wieku potwierdzają dobre dopasowanie takiej funkcji do danych empirycznych.

Dodatkowo, w celu zapobieżenia zjawisku *crossover* polegającym na tym, że wartości współczynników ekstrapolowane dla kobiet od pewnego wieku przewyższają odpowiednie wartości dla mężczyzn, autorzy przyjmują z góry wartości współczynników dla wieku 110 lat:  $m_{110} = 1,0$  dla mężczyzn i  $m_{110} = 0,8$  dla kobiet.

Do określenia parametrów funkcji autorzy używają zaobserwowanych wartości współczynników zgonów w wieku 84 i 85 lat.

Jednak doświadczenie pokazało, że przyjęte założenia dla wieku 110 lat nie gwarantują uniknięcia zjawiska *crossover*. Poniższa modyfikacja ma na celu uniknięcie zjawiska *crossover*.

Jedną z cech odróżniających metodę Coale'a-Kisker od innych metod jest fakt, że procedury obliczeń dla mężczyzn i dla kobiet różnią się (wartością  $m_{110}$ ). W poniższej propozycji modyfikacji tej metody idziemy krok dalej: obliczenia są wykonywane łącznie dla obu płci.

Do obliczenia parametrów funkcji używamy empirycznych wartości współczynników zgonów w rocznikach wieku od 75 do 84 lat oraz przyjętej z góry dla wieku 120 lat wartości  $m_{120} = 2,0$  dla obu płci.

Zakładamy, że w danej populacji parametr  $a$  jest jednakowy dla obu płci. Wyznaczamy go jako średnią  $\bar{a}$  z wartości  $a$  obliczonych oddzielnie dla mężczyzn i kobiet. Założenie to jest równoważne założeniu jednakowej dla obu płci wartości parametru  $s$  w oryginalnej wersji metody (Coale, Kisker, 1990). W rzadkich przypadkach, w których otrzymamy  $a > 0$ , dla zgodności ze sformułowanym na wstępie założeniem przyjmujemy  $a = 0$ . Pozostałe dwa parametry wyznaczamy oddzielnie dla mężczyzn i kobiet z uwzględnieniem obliczonego wspólnego  $\bar{a}$ .

Do obliczeń stosuje się następujące wzory:

dla każdej płci:

$$\bar{m}_{77} = \frac{1}{5} \sum_{x=75}^{79} m_x, \quad \bar{m}_{82} = \frac{1}{5} \sum_{x=80}^{84} m_x, \quad m_{120} = 2 \quad (3)$$

$$a = \frac{38 * \ln(\bar{m}_{77}) - 43 * \ln(\bar{m}_{82}) + 5 * \ln(m_{120})}{8170} \quad (4)$$

dla obu płci:

$$\bar{a} = \frac{1}{2}(a_{male} + a_{female}) \quad (5)$$

dla każdej płci:

$$b = \frac{\ln(m_{120}) - \ln(\bar{m}_{82}) - 1824 * \bar{a}}{38} \quad (6)$$

$$c = \ln(\bar{m}_{82}) - 5 * b - 25 * \bar{a} \quad (7)$$

oraz ostatecznie dla  $x=85, 86, \dots, 120$ :

$$m_x = \exp\{\bar{a} * (x - 77)^2 = b * (x - 77) + c\} \quad (8)$$

Zaproponowana w przedstawionej modyfikacji metody Coale'a-Kisker jednokowa wartość parametru  $a$  dla obu płci rozwiązuje problem *crossover*: Zakres wieku od 75 do 84 lat został dobrany na tyle szeroko, aby osłabić wpływ ewentualnych dużych wahań przypadkowych współczynników w starszym wieku oraz na tyle wąsko, aby osłabić wpływ wartości odległych od obszaru ekstrapolacji. Przyjęta wartość  $m_{120} = 2,0$  dla obu płci odpowiada założeniu, że prawdopodobieństwo zgonu w ciągu roku dla osoby 120-letniej jest bliskie jedności.

Jeśli do konstrukcji tablicy trwania życia używa się prawdopodobieństw zgonu  $q_x$  a nie współczynników  $m_x$ , to:

– do przejścia na współczynniki stosuje się wzór:

$$m_x = \frac{2 * q_x}{2 - q_x} \quad \text{dla } 75 \leq x \leq 84 \quad (9)$$

– wykonuje się ekstrapolację  $m_x$  powyższą metodą dla  $x \geq 85$

– otrzymane współczynniki przekształca się na prawdopodobieństwa wzorem

$$q_x = \frac{m_x}{1 + (1 - f_x) * m_x} \quad (10)$$

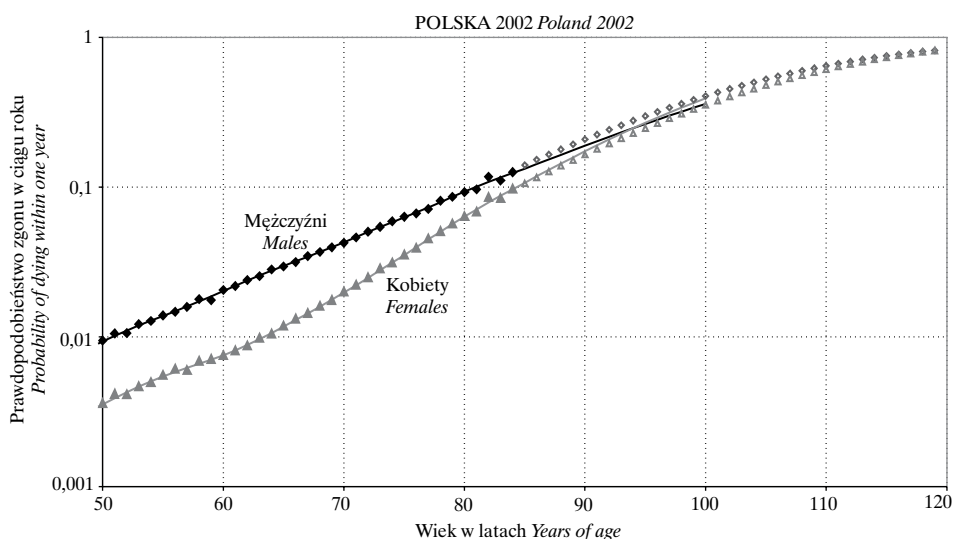
przy czym proponuje się przyjęcie następujących wartości pomocniczego parametru  $f_x$ :

$x$	85	90	95	100	105	110	115	120
$f_x$	0,500	0,495	0,475	0,450	0,420	0,385	0,345	0,300

### WERYFIKACJA ZAPROPONOWANEJ MODYFIKACJI METODY COALE'A-KISKER

Modyfikacja metody została zweryfikowana na danych zawartych w tablicach trwania życia dla województw i podregionów, pochodzących z Głównego Urzędu Statystycznego. Uzyskane wyniki w porównaniu z metodą ekstrapolacji stosowaną przez GUS upoważniają do następujących spostrzeżeń:

Rys. 1. Ekstrapolacja prawdopodobieństw zgonu, Polska 2002  
*Extrapolation of death probabilities, Poland 2002*



Legenda: / Legend:

znaczniki pełne – prawdopodobieństwa zgonu  $q_x$  surowe; / solid markers – raw death probabilities  $q_x$

linie ciągłe do wieku 84 lat – prawdopodobieństwa  $q_x$  wyrównane (metodą ruchomego dopasowania parabolicznego) / solid lines below 85 years of age – graduated probabilities  $q_x$  (by the moving parabolic fit method)

linie ciągłe od 85 do 100 lat – prawdopodobieństwa  $q_x$  ekstrapolowane (przez ekstrapolację intensywności zgonów  $\mu_x$  wielomianem) / solid lines 85 through 100 years – extrapolated  $q_x$  (by polynomial extrapolation of death intensity  $\mu_x$ )

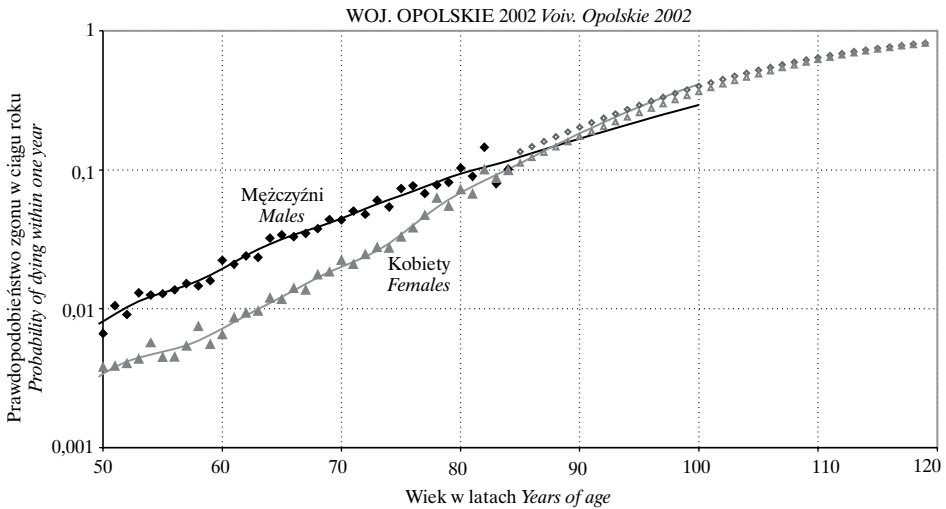
znaczniki konturowe – proponowana metoda ekstrapolacji / contour markers – proposed extrapolation method.

Źródło: dane GUS oraz obliczenia własne.

Source: the CSO data and own calculations.

- w przypadku regularnego przebiegu krzywych, co ma miejsce np. dla dużych populacji, różnice są nieznaczne, ponieważ *overcrossing* albo nie występuje w ogóle, albo powstaje dopiero około wieku 100 lat (por. rys. 1 dla Polski),
- dla małych populacji oraz tam, gdzie występują błędy w danych (dotyczących ludności i zgonów w rocznikach wieku) proponowana metoda daje wyniki bardziej stabilne – nie jest podatna na wpływ dużych odchyłeń w starszych rocznikach wieku,
- sytuacja przedstawiona na rysunku 2 dla woj. opolskiego jest przykładem jeszcze innego zjawiska polegającego na tym, że tendencja zmian danych empirycznych w wieku poniżej 85 lat nie odpowiada rzeczywistej (prawdopodobnej) tendencji w starszych rocznikach wieku. Taki układ danych występuje w przypadku mężczyzn w kilku województwach. Wydaje się, że proponowana metoda ekstrapolacji wskazuje właśnie prawidłowy kierunek zmian.

Rys. 2. Ekstrapolacja prawdopodobieństw zgonu, woj. opolskie 2002  
*Extrapolation of death probabilities, Opolskie voivodship 2002*



Legenda: / *Legend:*

- znaczniki pełne – prawdopodobieństwa zgonu  $q_x$  surowe / *solid markers – raw death probabilities  $q_x$*
- linie ciągłe do wieku 84 lat – prawdopodobieństwa  $q_x$  wyrównane (metodą ruchomego dopasowania parabolicznego) / *solid lines below 85 years of age – graduated probabilities  $q_x$  (by the moving parabolic fit method)*
- linie ciągłe od 85 do 100 lat – prawdopodobieństwa  $q_x$  ekstrapolowane (przez ekstrapolację intensywności zgonów  $\mu_x$  wielomianem) / *solid lines 85 through 100 years – extrapolated  $q_x$  (by polynomial extrapolation of death intensity  $\mu_x$ )*
- znaczniki konturowe – proponowana metoda ekstrapolacji / *contour markers – proposed extrapolation method.*

Źródło: dane GUS oraz obliczenia własne.

Source: the CSO data and own calculations.

## LITERATURA

Coale A.J., Kisker E.E., 1990, *Defects in Data on Old-Age Mortality in the United States: New Procedures for Calculating Schedules and Life Tables at the Higher Ages*, „Asian and Pacific Population Forum” 4, 1–31.