STUDIA I PRACE
Kolegium Zarządzania i Finansów
ZESZYT NAUKOWY 182

182/2021
s. 45–57

Szkoła Główna Handlowa w Warszawie
Oficyna Wydawnicza SGH
kolegia.sgh.waw.pl

Marcin Gwiazda
Szkoła Główna Handlowa w Warszawie
Kolegium Zarządzania i Finansów
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-7295-9446

Modelowanie struktury terminowej stóp procentowych w ramach dyrektywy Solvency II na przykładzie Polski

Streszczenie

Niniejsza praca dotyczy modelowania struktury terminowej stóp procentowych w kontekście dyrektywy Solvency II. Celem artykułu jest przedstawienie analizy porównawczej struktury terminowej stóp procentowych modelowanej za pomocą modelu Smitha-Wilsona oraz dwóch innych modeli dość powszechnie stosowanych w praktyce, na przykładzie rynku polskiego. Przeprowadzona analiza potwierdza zasadność stosowania modelu Smitha-Wilsona przez zakłady ubezpieczeń i towarzystwa emerytalne w modelowaniu struktury terminowej stóp procentowych na rynku polskim w kontekście dyrektywy Solvency II.

Słowa kluczowe: Solvency II, struktura terminowa stóp procentowych, model Smitha-Wilsona, wycena zobowiązań
Kody klasyfikacji JEL: E43, G12, G22, G28

1. Wprowadzenie

Struktura terminowa stóp procentowych odgrywa istotną rolę w wycenie aktywów i pasywów, w tym w szacowaniu wartości rezerw techniczno-ubezpieczeniowych wszystkich zakładów ubezpieczeń i towarzystw emerytalnych. Z tego względu wybór odpowiedniego modelu struktury terminowej stanowi bardzo ważny problem dla każdego zakładu ubezpieczeń i towarzystwa emerytalnego. Dyrektywa Unii Europejskiej, znana pod nazwą Solvency II, narzuca instytucjom sektora ubezpieczeń i emerytur stosowanie modelu Smitha-Wilsona do modelowania struktury terminowej stóp procentowych [Balter, Pelsser, Schotman, 2021].

Celem niniejszego artykułu jest przedstawienie analizy porównawczej struktury terminowej stóp procentowych modelowanej za pomocą modelu Smitha-Wilsona, modelu Nelsona-Siegela oraz modelu Svenssona dla rynku polskiego, w kontekście dyrektywy Solvency II. W obecnym stanie wiedzy autora niniejszego artykułu taka analiza nie została jeszcze przeprowadzona, jeśli chodzi o rynek polski, co było głównym motywem powstania tego artykułu. Wybór modelu Nelsona-Siegela i modelu Svenssona do porównania z modelem Smitha-Wilsona podyktowany był faktem, że są to modele dość powszechnie stosowane w praktyce modelowania struktury terminowej stóp procentowych. Analizowane modele zostały skalibrowane na podstawie wartości stóp zerokuponowych, od tenoru jednorocznego do tenoru dziesięcioletniego, otrzymanych z danych dotyczących polskich obligacji skarbowych z dnia 30 października 2020 r.

W niniejszym artykule został dokonany przegląd literatury przedstawiającej analizę porównawczą struktury terminowej stóp procentowych modelowanej za pomocą metody Smitha-Wilsona oraz innych modeli, w kontekście dyrektywy Solvency II. W dalszej części artykułu został ogólnie omówiony zakres dyrektywy Solvency II, następnie krótko przedstawione zostało tło stworzenia modelu Smitha-Wilsona oraz zakres danych publikowanych przez Europejski Urząd Nadzoru Ubezpieczeń i Pracowniczych Programów Emerytalnych w ramach struktury terminowej stóp procentowych modelowanej w kontekście dyrektywy Solvency II. Następnie omówiony został model Smitha-Wilsona pod względem technicznym, zostały zaprezentowane jego własności i elementy. W dalszej kolejności została przeprowadzona analiza porównawcza struktury terminowej stóp procentowych modelowanej za pomocą modelu Smitha-Wilsona, modelu Nelsona-Siegela oraz modelu Svenssona, dla rynku polskiego, w kontekście dyrektywy Solvency II. Na końcu przedstawiono wnioski z przeprowadzonej analizy, podsumowano zalety stosowania modelu Smitha-Wilsona i zaprezentowano syntetycznie jego wady przedstawione w literaturze przedmiotu.

2. Przegląd literatury

W niniejszym podrozdziale zostały syntetycznie zaprezentowane wnioski z prac przedstawiających analizę porównawczą struktury terminowej stóp procentowych modelowanej za pomocą metody Smitha-Wilsona oraz innych modeli, w kontekście dyrektywy Solvency II.

C.K. Chang i J.T. Li [2011] porównują krzywą otrzymaną z wykorzystaniem metody Smitha-Wilsona z krzywą wygenerowaną za pomocą modelu łączącego model GARCH i model Vasicka, na podstawie danych dla tajwańskich obligacji rządowych. Ta pierwsza jest lepiej dopasowana do danych rynkowych i wyżej położona dla krótkich i średnich terminów do wykupu, jednak dla dłuższych terminów zapadalności znajduje się już pod drugą z rozważanych krzywych, co powoduje, że wartość bieżąca zobowiązań jest mniejsza w przypadku proponowanego modelu hybrydowego niż w przypadku modelu Smitha-Wilsona. Autorzy badania wykazali również, że długi koniec krzywej otrzymanej z użyciem metody Smitha-Wilsona cechuje się mniejszą zmiennością, co ma wpływ na stabilność wskaźników finansowania.

W swej pracy M. Wahlers [2013] porównuje strukturę terminową stóp procentowych strefy euro uzyskaną za pomocą metody Smitha-Wilsona, a także trzech innych modeli – Nelsona-Siegela, Svenssona oraz Vasicka. Na podstawie przeprowadzonego badania Wahlers wskazuje na model Smitha-Wilsona jako najbardziej adekwatny w kontekście dyrektywy Solvency II, ze względu na najdokładniejsze dopasowanie do stóp rynkowych oraz generowanie wskaźników finansowania, które są znacznie bardziej stabilne i wyższe (dzięki niższej wartości zobowiązań) niż w przypadku pozostałych modeli.

M.M. Magurean [2016] również potwierdza lepsze dopasowanie do danych rynkowych oraz większą stabilność i wyższe położenie krzywej otrzymanej za pomocą metody Smitha-Wilsona niż w przypadku modelu Nelsona-Siegela oraz modelu Svenssona, dla stóp procentowych strefy euro. Jednocześnie zwraca uwagę na kwestię podnoszoną przez zakłady ubezpieczeniowe i fundusze emerytalne dotyczącą zbyt wysokiej wartości ostatecznej stopy forward (UFR) będącej elementem modelu Smitha-Wilsona (nienaturalnie wysokiej wartości, zważywszy na środowisko niskich wartości rynkowych stóp procentowych), wskazując na potrzebę przemyślenia i przeprowadzenia ewentualnych dalszych badań odnośnie do mechanizmu ustalania wartości tego elementu modelu.

Podobne wnioski wyciąga P.L. Jorgensen [2018], porównując krzywe otrzymane z wykorzystaniem metody Smitha-Wilsona, modelu Nelsona-Siegela, modelu Svenssona oraz metody bootstrapowej z ekstrapolacją stałą, dla stóp procentowych z rynku duńskiego. Jorgensen potwierdza lepsze dopasowanie do stóp rynkowych oraz wyższe położenie krzywej uzyskanej za pomocą metody Smitha-Wilsona w porównaniu z pozostałymi metodami. Empirycznie potwierdza również niższe wartości rezerw techniczno-ubezpieczeniowych wygenerowanych z użyciem metody Smitha-Wilsona w odniesieniu do reszty rozważanych modeli. Podnosi także wspomnianą kwestię nienaturalnie wysokiej długoterminowej stopy równowagi (ostatecznej stopy forward, ang. UFR), której wartość determinowana jest przez Europejski Urząd Nadzoru Ubezpieczeń i Pracowniczych Programów Emerytalnych (European Insurance and Occupational Pensions Authority, EIOPA).

3. Modelowanie struktury terminowej stóp procentowych w ramach dyrektywy Solvency II na przykładzie Polski

Dnia 1 stycznia 2016 r. weszło w życie Solvency II – dyrektywa Unii Europejskiej mająca na celu stworzenie nowych ram regulacyjnych dla sektora ubezpieczeń i emerytur [Jorgensen, 2018]. Dyrektywa ta składa się z trzech filarów [Stroiński, 2008]. Pierwszy filar dotyczy ilościowych wymagań finansowych i odnosi się do takich kwestii, jak wycena aktywów i pasywów, obliczanie rezerw techniczno-ubezpieczeniowych, środki własne, wymagany kapitał wypłacalności (ang. *Solvency Capital Requirement*, SCR), minimalne wymogi kapitałowe (ang. *Minimum Capital Requirement*, MCR) i zasady inwestowania [Batista, 2015]. Drugi filar dotyczy kontroli i nadzoru. Porusza zagadnienia związane z nadzorem ubezpieczeniowym, zarządzaniem ryzykiem, ładem korporacyjnym oraz wypłacalnością grupy kapitałowej [Stroiński, 2008]. Trzeci filar dotyczy natomiast ujawnień – sprawozdawczości publicznej i informacji do nadzoru [Stroiński, 2008].

Istotnym elementem w wycenie aktywów i pasywów, w tym w szacowaniu wartości rezerw techniczno-ubezpieczeniowych (są one bowiem częścią zobowiązań), jest struktura terminowa stóp procentowych. Aby była ona w pełni zgodna z danymi rynkowymi, Europejski Urząd Nadzoru Ubezpieczeń i Pracowniczych Programów Emerytalnych, w ramach Solvency II, rekomenduje stosowanie metody Smitha-Wilsona do estymacji krzywej terminowej stóp procentowych [EUNUPPE, 2020]. Model ten został po raz pierwszy przedstawiony w raporcie wewnętrznym brytyjskiej aktuarialnej firmy konsultingowej Bacon & Woodrow, w 2000 r.; nie zyskał jednak takiej popularności, jak np. model Nelsona-Siegela czy model Svenssona [Jorgensen, 2018]. Został zaprojektowany specjalnie dla generowania czynników dyskontowych optymalnych pod kątem kalkulacji wartości bieżącej długoterminowych zobowiązań zakładów ubezpieczeń i towarzystw emerytalnych. W praktyce finansów jego zastosowanie ogranicza się raczej do modelowania struktury terminowej stóp procentowych w ramach Solvency II.

EIOPA na swojej stronie internetowej publikuje dane i informacje dotyczące struktury terminowej stóp procentowych w ramach wspomnianej dyrektywy, w tym szczegóły formalne związane z estymacją i ekstrapolacją krzywej terminowej w ramach modelu Smitha-Wilsona, wartości parametrów należących do konstrukcji tego modelu, rodzaje rynkowych stóp procentowych i tenory wykorzystywane do szacowania struktury terminowej dla poszczególnych walut, jak również wyestymowaną krzywą (dokładnie, wartości stóp dla corocznych tenorów od jednego roku do stu pięćdziesięciu lat) dla poszczególnych krajów, przy różnych scenariuszach – z lub bez korekty zmienności oraz przy przesunięciu krzywej w górę lub w dół, w różnych kombinacjach [https://www.eiopa.europa.eu/tools-and-data/risk-free-interest-rate-term-structures_en].

Jak w przypadku większości modeli struktury terminowej stóp procentowych, również w modelu Smitha-Wilsona zakłada się, że są obserwowalne ceny rynkowe skończonej liczby instrumentów stopy procentowej [Jorgensen, 2018]. Instrumenty te, z założenia, powinny być płynne, pozbawione ryzyka, a ich przyszłe płatności – znane i pewne. Dlatego do estymacji krzywej za pomocą tej metody stosuje się instrumenty z rynku głębokiego, płynnego i transparentnego (ang. *Deep Liquid Transparent*, DLT). W praktyce modelowania EIOPA wykorzystuje stopy z rynku kontraktów IRS lub obligacji rządowych, w zależności od kraju, dla którego estymowana jest krzywa [EUNUPPE, 2020].

Model Smitha-Wilsona służy zarówno do interpolacji, jak i ekstrapolacji struktury terminowej stóp procentowych. Interpolując krzywą, model „szuka" idealnego dopasowania do stóp rynkowych, jednocześnie starając się uzyskać jak najbardziej gładką krzywą [Magurean, 2016]. Przy ekstrapolacji zakłada się natomiast z góry ustaloną wartość długoterminowej stopy równowagi, do której dąży krzywa poza ostatnim punktem, dla którego brana jest wartość rynkowej stopy procentowej [Magurean, 2016].

Wymaganie idealnego dopasowania krzywej do danych rynkowych sprawia, że w procesie optymalizacji krzywej niezbędna jest znaczna liczba parametrów. Stwarza to typowy problem interpolacji, gdzie kluczowym czynnikiem jest gładkość – uzyskana struktura musi posiadać pewien stopień gładkości, inaczej otrzyma się niepożądanie nieciągłą krzywą. Optymalizacja oparta na funkcjach sklejanych (również splajn, ang. *spline*) jest rozwiązaniem dla tego typu problemu i właśnie model Smitha-Wilsona jest wynikiem optymalizacji bazującej na wykładniczych funkcjach sklejanych [Magurean, 2016].

Model Smitha-Wilsona bazuje na następującej postaci funkcji dyskontowej [Gach, 2016]:

$$P(\tau)=e^{-UFR\cdot\tau}+\sum_{i=1}^{N}\xi_i\cdot K_i(\tau),\quad \tau>0, \tag{1}$$

gdzie $P(\tau)$ oznacza wartość funkcji dyskontowej dla okresu zapadalności τ, *UFR* to parametr stanowiący długoterminową stopę forward, ξ_i to *i*-ty parametr przy *i*-tej funkcji jądra $K_i(\tau)$, *N* oznacza natomiast liczbę cen instrumentów rynkowych (obligacji lub kontraktów IRS) stosowanych do kalibracji funkcji dyskontowej. Funkcje jądra K_i określone są za pomocą poniższej formuły [Jorgensen, 2018]:

$$K_i(\tau)=\sum_{j=1}^{J}c_{i,j}\cdot W\left(\tau,\tau_j\right),\quad \tau>0,\quad i=1,\ldots,N, \tag{2}$$

gdzie *J* to liczba różnych okresów zapadalności, w których nastąpi płatność dla co najmniej jednego z rozważanych instrumentów, τ_j to jeden z takich okresów zapadalności, $c_{i,j}$ oznacza natomiast wartość płatności instrumentu *i* w terminie końca okresu τ_j. Z kolei W (τ, τ_j) stanowi symetryczną „funkcję Wilsona", która jest wyrażona następującym wzorem [Dziwok, Wirth, 2020]:

$$W\left(\tau,\tau_j\right)=e^{-UFR\cdot\left(\tau+\tau_j\right)}\cdot\left\{\alpha\cdot\min\left(\tau,\tau_j\right)-\frac{e^{-\alpha\max\left(\tau,\tau_j\right)}\cdot\left(e^{\alpha\min\left(\tau\tau_j\right)_{-e}-\alpha\min\left(\tau,\tau_j\right)}\right)}{2}\right\}, \qquad (3),$$

gdzie α jest dodatnim parametrem oznaczającym szybkość zbieżności krzywej dochodowości do wartości długoterminowej stopy forward (UFR).

Celem wyznaczenia krzywej stóp spot dla modelu Smitha-Wilsona, na podstawie skalibrowanej funkcji dyskontowej określonej przez formuły (1)–(3), można wykorzystać relację między funkcją dyskontową $P(\tau)$ a ciągłą stopą spot $r(\tau)$, która to relacja wyraża się następującym wzorem [Dziwok, Wirth, 2020]:

$$P(\tau)=e^{-r(\tau)\cdot\tau}. \qquad (4)$$

Procedurę implementacyjną oraz rozważania dotyczące kalibracji modelu Smitha-Wilsona znaleźć można w materiale opracowanym przez EIOPA [EUNUPPE, 2020], jak również np. w artykule Jorgensena [Jorgensen, 2018].

Na kształt i położenie krzywej w obszarze ekstrapolacji, przy zastosowaniu modelu Smitha-Wilsona, mają wpływ następujące elementy [EUNUPPE, 2020]:

- ostatni płynny tenor (ang. *Last Liquid Point*, LLP),
- stopa rynkowa dla ostatniego płynnego tenoru,
- zastosowanie korekt,
- ostateczna stopa forward (ang. *Ultimate Forward Rate*, UFR),
- punkt i okres zbieżności,
- parametr szybkości zbieżności do UFR.

Ostatni płynny tenor jest najdłuższym terminem zapadalności, dla którego istnieje głęboki, płynny i transparentny rynek instrumentu referencyjnego [Murray, MacDonnell, Phelan, 2019]. Jest to jednocześnie punkt startowy ekstrapolacji. EIOPA określa LLP na podstawie takich danych, jak wolumen transakcji, częstotliwość zawierania transakcji oraz widełki cenowe – spread bid-ask [Murray, MacDonnell, Phelan, 2019].

Korekta dopasowująca (ang. *matching adjustment*, MA) to korekta tzw. bazowej stopy wolnej od ryzyka o część różnicy pomiędzy średnią rentownością aktywów dłużnych danego podmiotu a średnią stopą wolną od ryzyka skorygowaną o ryzyko kredytowe emitenta instrumentów dłużnych, będących w posiadaniu danego podmiotu [Chrzanowska, Michalska, Wielgosz, 2013]. Korekta ta może przyjmować wartości dodatnie i ujemne. W przypadku dodatniej wartości korekty krzywa przesuwa się w górę, co oznacza większe stopy dyskontowe i, w rezultacie, niższą wartość rezerw techniczno-ubezpieczeniowych.

Korekta zmienności (ang. *Volatility Adjustment*, VA) redukuje sztuczną zmienność, co wynika z [Chrzanowska, Michalska, Wielgosz, 2013]:

- permanentnego stosowania (brak skutków uruchomienia/wycofania),
- automatycznego stosowania korekty krajowej,

- braku wpływu na SCR,
- korygowania wyłącznie środków własnych,
- symetryczności (własności występowania ze zbliżonym prawdopodobieństwem wartości dodatnich i ujemnych) stosowanego mechanizmu.

Korekta ta odpowiada różnicy pomiędzy najlepszym oszacowaniem rezerw techniczno-ubezpieczeniowych (danego podmiotu) wyznaczonym na podstawie bazowej stopy wolnej od ryzyka a najlepszym oszacowaniem rezerw wyznaczonym na podstawie skorygowanej bazowej stopy wolnej od ryzyka [Chrzanowska i in., 2013]. Może ona przyjmować wartości dodanie i ujemne. Podobnie jak w przypadku korekty dopasowującej, dodatnia wartość korekty zmienności powoduje przesunięcie krzywej w górę, zwiększając wartość stóp dyskontowych i obniżając tym samym wartość rezerw techniczno-ubezpieczeniowych.

EIOPA wyróżnia jeszcze korektę z tytułu ryzyka kredytowego, która jest aplikowana jako równoległe obniżenie wartości wszystkich stóp benchmarkowych o określoną wartość [EUNUPPE, 2020].

Ostateczna stopa forward to parametr modelu, do którego wartości zbiega estymowana krzywa [Akinyemi i in., 2019]. W istocie wartość UFR jest sumą długoterminowej oczekiwanej wartości stopy inflacji oraz długoterminowej oczekiwanej wartości stopy realnej [Broeders, de Jong, Schotman, 2016].

Punkt zbieżności to tenor, dla którego krzywa powinna osiągnąć wartość UFR (technicznie, w tym punkcie krzywa osiąga wartość zbliżoną do UFR w ramach ustalonego marginesu) i jest wyznaczany jako maksimum sumy wartości LLP i liczby 40 oraz liczby 60 [EUNUPPE, 2020]. Wyznacza się również okres zbieżności jako maksimum liczby 40 oraz różnicy liczby 60 i wartości LLP [EUNUPPE, 2020].

Wartość parametru α określa szybkość zbieżności krzywej do UFR i jest wyznaczana (w procesie optymalizacji) tak, by krzywa jak najwolniej osiągała, w punkcie zbieżności, wartość zbliżoną do UFR w ramach ustalonego marginesu [Beers, Elshof, 2012].

Poniżej zostały przedstawione modele Nelsona-Siegela i Svenssona.

Model Nelsona-Siegela został zaproponowany w artykule Nelsona i Siegela [1987], specjalnie dla celu estymacji struktury terminowej stóp procentowych.

Punktem wyjścia jest równanie stóp forward. Przyjmuje się, że ich strukturę terminową opisuje poniższa funkcja [Nelson, Siegel, 1987]:

$$f(\tau)=\alpha_1+\alpha_2 * e^{-\frac{\tau}{\beta}}+\alpha_3 * \frac{\tau}{\beta} * e^{-\frac{\tau}{\beta}}, \tag{5}$$

gdzie α_1, α_2, α_3 oraz β to parametry funkcji. Strukturę terminową stóp spot opisuje natomiast funkcja postaci [Nelson, Siegel, 1987]:

$$r(\tau)=\alpha_1+(\alpha_2+\alpha_3) * \frac{\beta}{\tau} * \left(1-e^{-\frac{\tau}{\beta}}\right)-\alpha_3 * e^{-\frac{\tau}{\beta}}. \tag{6}$$

Występujące w modelu parametry mają poniższe interpretacje [Kliber, Kliber, 2010]:

- α_1 jest stopą oprocentowania obligacji wieczystych – określa asymptotyczne zachowanie struktury terminowej, tj. $\alpha_1 = r$ (¥);
- $\alpha_1 + \alpha_2$ to chwilowa stopa krótkoterminowa, tj. $\alpha_1 + \alpha_2 = r$ (0);
- spread (widełki) między stopą oprocentowania obligacji wieczystych a chwilową stopą krótkoterminową ma wartość $-\alpha_2$ i może być zinterpretowany jako nachylenie struktury terminowej;
- α_3 określa wygięcie kształtu funkcji (rodzaj „garba"); gdy α_3 jest dodatnie, kształt funkcji jest wygięty w górę, a więc „garb" stanowi maksimum funkcji, gdy α_3 jest ujemne, kształt funkcji jest wygięty w dół, zatem „garb" stanowi minimum funkcji;
- $\beta > 0$ determinuje prędkość, z jaką stopy procentowe zbliżają się do wartości długoterminowej (wartości stopy oprocentowania obligacji wieczystych); im wyższa wartość tego parametru, tym szybciej stopy procentowe stabilizują się na poziomie stopy długoterminowej; przy dużych wartościach tego parametru „garb" usytuowany jest bliżej długiego odcinka krzywej.

Parametry modelu można oszacować, np. nieliniową metodą najmniejszych kwadratów, przy wykorzystaniu rynkowych cen lub rentowności obligacji [Kliber, 2009].

L.E.O. Svensson [1994] rozszerzył model Nelsona-Siegela, dodając do równania struktury terminowej stóp forward dodatkowy czynnik, z dwoma dodatkowymi parametrami. W rezultacie model jest bardziej elastyczny i umożliwia lepsze dopasowanie do danych rynkowych. Równanie stopy forward wyraża się wzorem [Svensson, 1994]:

$$f(\tau) = \alpha_1 + \alpha_2 * e^{-\frac{\tau}{\beta_1}} + \alpha_3 * \frac{\tau}{\beta_1} * e^{-\frac{\tau}{\beta_2}} + \alpha_4 * \frac{\tau}{\beta_2} * e^{-\frac{\tau}{\beta_2}}. \tag{7}$$

Struktura terminowa stóp spot jest natomiast wyrażona równaniem [Svensson, 1994]:

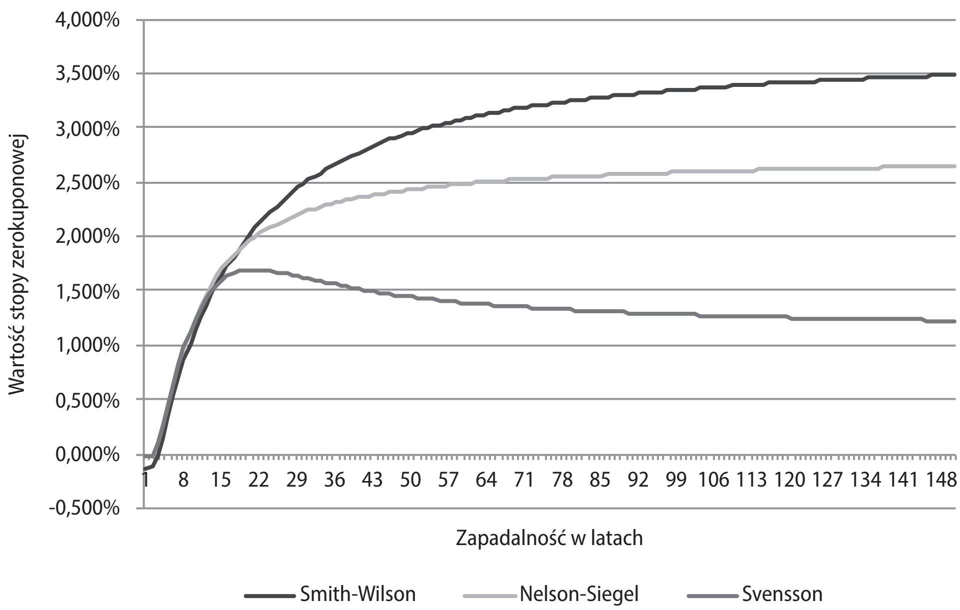
$$r(\tau) = \alpha_1 + \alpha_2 * \frac{\beta_1}{\tau} * \left(1 - e^{-\frac{\tau}{\beta_1}}\right) + \alpha_3 * \left(\frac{\left(1 - e^{-\frac{\tau}{\beta_2}}\right) * \beta_1}{\tau} - e^{-\frac{\tau}{\beta_2}}\right) + \alpha_4 * \left(\frac{\left(1 - e^{-\frac{\tau}{\beta_2}}\right) * \beta_2}{\tau} - e^{-\frac{\tau}{\beta_2}}\right). \tag{8}$$

Wspomniane rozszerzenie powoduje, że struktura terminowa modelowana za pomocą modelu Svenssona może posiadać dwa „garby". Za ich charakter (minimum/maksimum) odpowiadają parametry α_3 i α_4, za rozmieszczenie natomiast – parametry β_1 i β_2 [Kliber, 2009]. Interpretacja pozostałych parametrów jest taka sama jak w modelu Nelsona-Siegela.

Parametry modelu można oszacować, np. nieliniową metodą najmniejszych kwadratów, przy wykorzystaniu rynkowych cen lub rentowności obligacji [Kliber, 2009].

Na rysunkach 1 i 2 zostały przedstawione wykresy krzywych uzyskanych na podstawie modeli Smitha-Wilsona, Nelsona-Siegela oraz Svenssona, na podstawie wartości stóp zerokuponowych, od tenoru jednorocznego do tenoru dziesięcioletniego, otrzymanych z danych dotyczących polskich obligacji skarbowych (dane benchmarkowe określone przez EIOPA dla waluty PLN jako wsad do modelu Smitha-Wilsona), z dnia 30 października 2020 r. (oszacowania dla tenorów od jednego roku do stu pięćdziesięciu lat – tak jak określiła EIOPA). Krzywa Smitha-Wilsona została wzięta z danych opublikowanych przez EIOPA, natomiast krzywe Nelsona-Siegela oraz Svenssona zostały uzyskane przy wykorzystaniu programu statystycznego R. Rysunki prezentujące wspomniane krzywe zostały sporządzone w programie Excel.

Rysunek 1. Krzywe zerokuponowe do tenoru 150-letniego za dzień 30 października 2020 r.



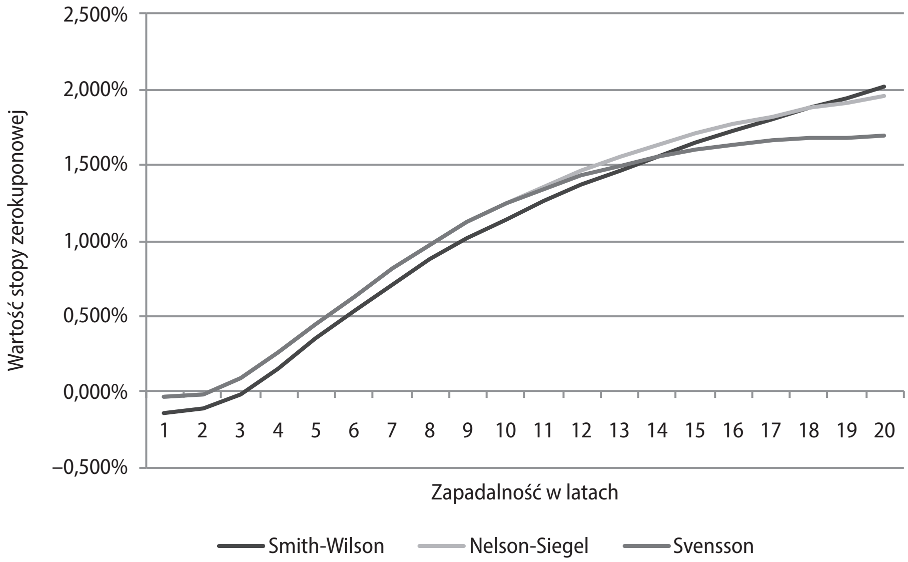
Źródło: opracowanie własne.

Na podstawie rysunku 1 można wysnuć wniosek, że mniej więcej do tenoru dziesięcioletniego (ostatni płynny tenor, LLP) wspomniane krzywe w znacznym stopniu się pokrywają, lecz im dalej w stronę „długiego końca", tym rozbieżności pomiędzy krzywymi są większe. Od punktu LLP krzywa Svenssona „pnie się" jeszcze w górę do około tenoru dwudziestoletniego, po czym zaczyna „opadać" łagodnie w dół. Krzywe Nelsona-Siegela oraz Smitha-Wilsona są natomiast rosnące w całym badanym przedziale, przy czym ta druga wznosi się znacznie wyżej od pierwszej, zbiegając asymptotycznie do wartości 3,5% (przy wartości ostatecznej stopy forward – UFR, równej 3,75%).

Na rysunku 2 został przedstawiony wykres ukazujący fragment wyżej wspomnianych krzywych, obejmujący tenory od jednorocznego do dwudziestoletniego.

Na podstawie rysunku 2 można wysnuć wniosek, że do około tenoru trzynastoletniego krzywa Smitha-Wilsona znajduje się nieco niżej od reszty rozpatrywanych krzywych, jednak jest to spowodowane zastosowaniem korekty z tytułu ryzyka kredytowego (w tym przypadku 10 punktów bazowych do stóp rynkowych branych jako wsad do estymacji krzywej).

Rysunek 2. Krzywe zerokuponowe do tenoru 20-letniego za dzień 30 października 2020 r.



Źródło: opracowanie własne.

W kontekście dyrektywy Solvency II powyższe oznacza, że modelowanie struktury terminowej stóp procentowych metodą Smitha-Wilsona prowadzi do uzyskania niższej wartości bieżącej długoterminowych (powyżej dwudziestu lat) zobowiązań (wyższe wartości stóp procentowych implikują niższe wartości czynników dyskontowych, a w rezultacie – niższą wartość bieżącą) niż w przypadku modeli Svenssona i Nelsona-Siegela. Fakt ten jest szczególnie istotny z punktu widzenia funduszy emerytalnych oraz tych zakładów ubezpieczeń, które posiadają zobowiązania o ponad dwudziestoletnich terminach wymagalności (niższa wartość bieżąca zobowiązań oznacza możliwość utrzymywania mniejszej rezerwy techniczno-ubezpieczeniowej). W przypadku zobowiązań o krótszym terminie zapadalności zastosowanie modelu Smitha-Wilsona implikuje relatywnie wyższą wartość bieżącą, ze względu na korektę z tytułu ryzyka kredytowego. Jednak rozbieżność w „krótszym końcu" krzywej jest znacznie mniejsza, co powoduje, że wybór modelu struktury terminowej (pomiędzy rozpatrywanymi modelami) nie jest tak istotny jak w przypadku „dłuższego odcinka" krzywej.

Pomimo takich zalet, jak idealne dopasowanie krzywej do stóp rynkowych [Herold, Wirth, 2015] oraz możliwość utrzymywania, stosunkowo do innych modeli, mniejszej rezerwy techniczno-ubezpieczeniowej (przynajmniej ze względu na wartość bieżącą zobowiązań o znacznie dłuższym terminie wymagalności), model Smitha-Wilsona posiada kilka wad.

Po pierwsze model ten implikuje dość niepraktyczną strategię hedgingową zobowiązań o tenorze wyższym niż ostatni płynny tenor [Lageras, Lindholm, 2016]. Wtedy idealne zabezpieczenie wymaga zajęcia, naprzemiennie, długiej i krótkiej pozycji w obligacjach o następujących kolejno po sobie tenorach, co prowadzi do uzyskania całkowitej ekspozycji zabezpieczeń wyższej niż wartość bieżąca zabezpieczanych zobowiązań. Co więcej, wraz z upływem czasu zajęte pozycje zabezpieczające muszą być zamienione na przeciwne ze względu na zmniejszające się tenory w portfelu zabezpieczeń, co zwiększa koszt zabezpieczenia.

Po drugie czynniki dyskontowe mogą być ujemne, gdy stopy zerokupnowe dla najwyższych płynnych tenorów są wysokie w porównaniu z ostateczną stopą forward, natomiast parametr szybkości zbieżności do UFR ma dość małą wartość [Lageras, Lindholm, 2016].

Po trzecie wartość parametru szybkości zbieżności do UFR musi zostać określona niezależnie od modelu. Najczęściej jest określana na podstawie wiedzy eksperckiej [FINANSTILSYNET, 2010]. Optymalizacja wartości tego parametru jest bardzo wymagająca pod względem formalnym, a zatem i technicznym.

Jednak pomimo wspomnianych wad i relatywnie małej popularności, zarówno w praktyce finansów, jak i w pracach naukowych, EIOPA zarekomendowała stosowanie metody Smitha-Wilsona, uznając, że jej zalety przewyższają wady.

4. Podsumowanie

Wyniki przeprowadzonej analizy porównawczej struktury terminowej stóp procentowych modelowanej za pomocą modelu Smitha-Wilsona, modelu Nelsona-Siegela oraz modelu Svenssona dla rynku polskiego, w kontekście dyrektywy Solvency II, potwierdzają rezultaty otrzymane przez innych badaczy dla innych rynków europejskich, przynajmniej jeśli chodzi o „długi koniec" krzywej dochodowości, który jest znacznie wyżej położony w przypadku modelu Smitha-Wilsona. W odniesieniu do części krzywej z krótkimi i średnimi terminami zapadalności wszystkie analizowane krzywe są bardzo zbliżone, choć krzywa wygenerowana za pomocą modelu Smitha-Wilsona znajduje się nieco poniżej pozostałych.

Pomimo posiadania wad przedstawianych w literaturze przedmiotu i omówionych w niniejszym artykule, model Smitha-Wilsona cechuje się generowaniem struktury terminowej idealnie dopasowanej do rynkowych stóp procentowych i pozwalającej utrzymywać, w stosunku do innych analizowanych w niniejszym artykule modeli, rezerwy techniczno-ubezpieczeniowe o niższej wartości (przynajmniej ze względu na wartość bieżącą zobowiązań o znacznie dłuższym terminie wymagalności). Konieczność utrzymywania mniejszych rezerw może pozwolić przesunąć uwolniony kapitał do innych obszarów działalności zakładów ubezpieczeń i towarzystw emerytalnych, np. działalności inwestycyjnej, celem wypracowania wyższych stóp zwrotu.

Wspomniane zalety zdają się przeważać wady, co podkreśla zasadność stosowania przez zakłady ubezpieczeń i towarzystwa emerytalne na rynku polskim modelu Smitha-Wilsona w modelowaniu struktury terminowej stóp procentowych w kontekście dyrektywy Solvency II.

Sugerowanym kierunkiem dalszych badań w tym zakresie byłyby potencjalne usprawnienia modelu Smitha-Wilsona mające na celu wyeliminowanie, lub przynajmniej zredukowanie, przedstawianych w literaturze wad tego modelu.

Bibliografia

1. Akinyemi K., Kerbeshian J., Leiser B., Matson P. [2019], *Yield Curve Extrapolation Methods. Methodologies for Valuing Cash Flows that Extend Beyond the Maximum Yield Curve*, Society of Actuaries, https://www.soa.org/globalassets/assets/files/resources/research-report/2019/yield-curve-report.pdf
2. Balter A., Pelsser A., Schotman P. [2021], *What Does a Term Structure Model Imply about Very Long-Term Interest Rates?*, „Journal of Empirical Finance", doi: https://doi.org/10.1016/j.jempfin.2021.03.006
3. Batista C.M. [2015], *How Do Current Term Structure Models Behave Beyond the Last Liquid Point? A Comparison of the DNS and Smith-Wilson Methods*, praca magisterska, Nova School of Business and Economics Maastricht University, https://www.semanticscholar.org/paper/How-do-current-term-structure-model-behave-beyond-A-Batista/e547c0ccdeef12fcf3864f57cb3f8869d22ebd61
4. Beers R.H.A. van, Elshof W. [2012], *Evaluating the Solvency Capital Requirement of Interest Rate Risk in Solvency II*, Milliman Research Report, Amsterdam.
5. Broeders D.W.G. A., de Jong F., Schotman P. [2016], *Interest Rate Models for Pension and Insurance Regulation*, Netspar Industry Paper Series, Design 56, https://www.netspar.nl/assets/uploads/Netspar_Design_56_WEB.pdf
6. Chang C.K., Li J.T. [2011], *Extrapolation of Long-Term Risk-Free Interest Rates: A Case Study for the Taiwan Insurance Market*, „African Journal of Business Management", 5(26), 10645–10656, https://academicjournals.org/article/article1380531188_Chand%20and%20Li.pdf
7. Chrzanowska M.K., Michalska A., Wielgosz M. [2013], *Wyniki badania wpływu potencjalnych rozwiązań regulacyjnych dla tzw. długoterminowych produktów ubezpieczeniowych zawierających gwarancje (Long-Term Guarantees Assessment – LTGA) na krajowym rynku ubezpieczeniowym*, Urząd Komisji Nadzoru Finansowego, Warszawa.
8. Dziwok E., Wirth M. [2020], *Different Approaches to the Reference Yield Curve Construction – and Their Application into Fund Transfer Pricing Mechanism*, Contemporary Trends and Challenges in Finance, proceedings from the 5th Wroclaw International Conference in Finance, https://www.researchgate.net/publication/341195911_Different_Approaches_to_the_Reference_Yield_Curve_Construction-And_Their_Application_into_Fund_Transfer_Pricing_Mechanism
9. EUNUPPE [2020], *Technical Documentation of the Methodology to Derive EIOPA's Risk-Free Interest Rate Term Structures*, Europejski Urząd Nadzoru Ubezpieczeń i Pracowniczych Programów Emerytalnych, Frankfurt am Main, https://www.eiopa.europa.eu/sites/default/files/risk_free_interest_rate/21.08.2020_-_technical_documentation.pdf
10. FINANSTILSYNET – The Financial Supervisory Authority of Norway [2010], *A Technical Note on the Smith-Wilson Method*, Oslo, http://janroman.dhis.org/finance/Smith%20Wilson/A_Technical_Note_on_the_Smith-Wilson_Method_100701.pdf
11. Gach F. [2016], *Note on the Smith-Wilson Interest Rate Curve*, „International Journal of Theoretical and Applied Finance", 19(07), doi:https://doi.org/10.1142/S0219024916500394
12. Herold W., Wirth M. [2015], *Asset Liability Management and Interest Rate Risk in Solvency II – an Empirical Study*, Workshops – Proceedings of OeNB Workshops 20, s. 71–85.

13. Jorgensen P.L. [2018], *An Analysis of the Solvency II Regulatory Framework's Smith-Wilson Model for the Term Structure of Risk-Free Interest Rates*, „Journal of Banking and Finance", 97, s. 219–237.
14. Kliber P. [2009], *Estymacja struktury terminowej stóp procentowych w Polsce*, „Bank i Kredyt", 40(1), s. 109–126.
15. Kliber A.M., Kliber P. [2010], *Podstawy modelowania struktury terminowej stóp procentowych*, Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego w Poznaniu, Poznań.
16. Lageras A., Lindholm M. [2016], *Issues with the Smith-Wilson Method*, „Insurance: Mathematics and Economics", 71, s. 93–102.
17. Magurean M.M. [2016], *Extrapolation Methods of the Term Structure of Interest Rates under Solvency II*, Sapienza Universita di Roma, Rzym.
18. Murray K., MacDonnell B., Phelan E. [2019], *Solvency II under Review: Part 1. Extrapolation of the Risk-Free Rate Curve*, Milliman Report.
19. Nelson C.R., Siegel A.F. [1987], *Pasimonious Modeling of Yield Curves*, „Journal of Business", 60, s. 473–489.
20. Stroiński K. [2008], *Solvency II. Nadzór, wymogi zarządcze oraz nadzór grupowy*, Polska Izba Ubezpieczeń, Deloitte Advisory, Warszawa, https://docplayer.pl/6151265-Solvency-ii-nadzor-wymogi-zarzadcze-oraz-nadzor-grupowy-polska-izba-ubezpieczen-deloitte-advisory--sp-z-o-o-krzysztof-stroinski.html
21. Svensson L.E.O. [1994], *Estimating and Interpreting forward Interest Rates: Sweden 1992–1994*, Working Paper, no. 4871, NBER, Cambridge.
22. Wahlers M. [2013], *Valuation of Long-term Liabilities under Solvency II – Extrapolation Methods for the European Interest Rate Market*, praca magisterska, Maastricht University, Maastricht, https://www.netspar.nl/assets/uploads/044_MSc_Marie_Wahlers.pdf

Modelling Interest Rate Term Structure Within the Framework of Solvency II Directive: the Case of Poland

Summary

This work is about modelling interest rate term structure in the context of Solvency II Directive. The aim of the paper is to provide a comparative analysis of interest rate term structure modelled using the Smith-Wilson method and two other models rather commonly applied in practice to the Polish market. The analysis confirms that the application of Smith-Wilson method to the modelling of interest rate term structure by insurance companies and pension schemes in the Polish market in the context of Solvency II Directive is fully justified.

Keywords: Solvency II, interest rate term structure, Smith-Wilson method, valuation of liabilities