STUDIA I PRACE
Kolegium Zarządzania i Finansów
ZESZYT NAUKOWY 171

171/2019
s. 19–36

Szkoła Główna Handlowa w Warszawie
Oficyna Wydawnicza SGH
kolegia.sgh.waw.pl

Anna Sulima
Wydział Zarządzania, Informatyki i Finansów
Uniwersytet Ekonomiczny we Wrocławiu

Optymalna strategia inwestycyjna na rynku finansowym Blacka-Scholesa-Mertona typu Lévy'ego

Streszczenie

Celem badań jest znalezienie optymalnej strategii inwestycyjnej na zupełnym rynku finansowym Blacka-Scholesa-Mertona typu Lévy'ego bez arbitrażu. W artykule wyznaczono udziały różnych instrumentów finansowych w portfelu optymalnym. Ceny tych instrumentów opisane są za pomocą procesu Levy'ego, który jest uogólnieniem procesu Wienera. Ponadto założono, że współczynniki modelu zależą od stanów łańcucha Markowa. Taki rynek jest niezupełny, co oznacza, że nie każdą wypłatę można zreplikować za pomocą pewnej strategii inwestycyjnej. Aby uzupełnić ten rynek, dodano skokowe instrumenty finansowe oraz aktywa potęgowo skokowe. Następnie wykorzystano metody programowania dynamicznego do wyznaczenia optymalnej strategii inwestycyjnej na tym rynku. Optymalna strategia to taka, która maksymalizuje oczekiwaną użyteczność procesu bogacenia na końcu ustalonego z góry okresu. Analizę przeprowadzono dla logarytmicznej i potęgowej funkcji użyteczności wypłaty.

Słowa kluczowe: model przełącznikowy rynku, optymalne sterowanie, arbitraż, zupełność rynku, całka stochastyczna, procesy Lévy'ego
Kody klasyfikacji JEL: C02, G11

1. Wprowadzenie

Teoria wyboru portfela jest ważnym tematem zarówno w teorii, jak i praktyce współczesnej bankowości i finansów. Jest ona podstawą podejmowania decyzji inwestycyjnych na rynkach finansowych. H.M. Markowitz [1952] był pionierem wykorzystania metod matematycznych do formułowania i analizy teorii wyboru portfela. Natomiast R.C. Merton [1973; 1976] rozpowszechnił użycie stochastycznej teorii sterowania optymalnego do uzyskania rozwiązań dla problemu optymalnego wyboru portfela.

Rozważany w tej pracy model Blacka-Scholesa-Mertona [1973] jest stochastycznym równaniem różniczkowym, opisującym dynamikę cen instrumentów finansowych w czasie ciągłym. Pierwotna wersja tego modelu zakładała, że ceny tych instrumentów zadane są przez proces Wienera. Jednak liczne badania empiryczne (zob. [Black, Jensen, Scholes, 1972]) pokazują, że założenie to nie jest adekwatne do rzeczywistego opisu dynamiki cen. W związku z tym, zamiast procesu Wienera, wykorzystano proces Lévy'ego, który lepiej opisuje procesy cen, ponieważ zawiera skoki (zob. [Sato, 1999; Schoutens, 2003]).

Oryginalny model Blacka-Scholesa-Mertona [Black, Scholes, 1973] zakłada także, że współczynniki tego modelu są stałe. Wielu badaczy podjęło się sformułowania alternatywnych modeli, które biorą pod uwagę zmienność tych współczynników w czasie. Dostarczają one bardziej realistycznych sposobów modelowania zachowań cen instrumentów finansowych. Są to m. in. skokowy model dyfuzji [Merton, 1976], model zmienności stochastycznej [Hull, White, 1987] oraz model przełącznikowy [Naik, 1993]. Modele przełącznikowe, inaczej nazywane modelami Markowsko modelowanymi, wydają się być najlepszymi kandydatami do opisywania procesów cen akcji, ponieważ uwzględniają zmiany środowiska makroekonomicznego.

W pracy będziemy rozważali przełącznikowy model Blacka-Scholesa-Mertona. Współczynniki będą zależały od łańcucha Markowa i będą się zmieniały wraz ze zmianą stanu łańcucha. W rzeczywistości zbiór parametrów zmienia się (przełącza) na inny zestaw, jeśli zachodzą zmiany strukturalne w warunkach gospodarczych, zmiany środowiska inwestycyjnego itp. Przełącznikowy model rynku Blacka-Scholesa-Mertona typu Lévy'ego jest niezupełny. Wynika to z faktu, że ceny akcji w tym modelu zawierają nieskończenie wiele źródeł ryzyka. Ryzyko to występuje na skutek zmiany stanu łańcucha Markowa lub jest generowane poprzez wahania ceny rynkowej akcji opisanej za pomocą losowej miary Poissona. Brak zupełności oznacza, że nie każda wypłata jest doskonale replikowalna za pomocą dostępnych na rynku instrumentów finansowych. Sulima [2018] zaprezentowała metody uzupełniania rynku poprzez rozszerzenie modelu o skokowe instrumenty finansowe oraz aktywa potęgowo-skokowe. Zupełność rynku może być interpretowana w ten sposób, że wszystkie źródła ryzyka finansowego wyceniane są jednoznacznie i wszystkie przyszłe stany gospodarki mogą być replikowane przez aktywa finansowe znajdujące się w wybranym portfelu. Rozważany rynek charakteryzuje się brakiem arbitrażu przy pewnych założeniach opisanych w pracy A. Sulimy [2018]. Brak arbitrażu oznacza, że inwestor nie może osiągać zysku bez ponoszenia ryzyka. Na rynku zupełnym bez arbitrażu, cena instrumentu finansowego jest zadana przez warunkową wartość oczekiwaną zdyskontowanych wypłat względem miary równoważnej (zob. [Jakubowski, 2006]).

Literatura dotycząca problemów wyboru optymalnego portfela na rynku o niestałych współczynnikach jest obszerna. Bauerle i Rieder [2004] oraz Rieder i Bauerle [2005] badali problem optymalizacji portfela na rynku, w którym zmienność ceny instrumentu jest modelowana przez obserwowalny i nieobserwowalny łańcuch Markowa. Ten problem ze zmiennością stochastyczną cen instrumentów finansowych został rozważony przez Phama i Quenez [2001] oraz Fleminga i Hernandez-Hernandeza [2003]. Problemy optymalizacji portfela w przełącznikowym modelu rynku finansowego były także już rozważane. Jedną z pierwszych prac opublikował Zariphopoulou [1992]. Autor maksymalizuje użyteczność konsumpcji z proporcjonalnymi kosztami za transakcje. Wyniki tego autora zostały uogólnione przez wielu innych, m.in. X. Zhanga i G. Yina [2004] i R. Stockbridgea [2002]. Aby rozwiązać problem maksymalizacji oczekiwanej użyteczności majątku, niektórzy autorzy używają metod numerycznych (patrz [Sass, Haussmann, 2004; Nagai, Runggaldier, 2008; Shen, Siu, 2012; Fu, Wei, Yang, 2014]). Gassiat et al. [2014] przeanalizowali problem maksymalizacji użyteczności w modelu przełącznikowym Blacka-Scholesa z ograniczeniami płynności. B.G.Y.U. Jang et al. [2007] zbadali w tym modelu wybór portfela z kosztami za transakcje. W pracy X. Zhanga, T.K. Siu i Q. Menga [2010] autorzy rozwiązali problem wyboru optymalnego portfela bez kosztów transakcyjnych w przełącznikowym modelu rynku Blacka-Scholesa z czasem ciągłym. Otrzymali oni rozwiązania *explicite* problemu optymalizacji portfela dla logarytmicznej i potęgowej funkcji użyteczności. Podobne wyniki dla przełącznikowego modelu rynku Blacka-Scholesa były uzyskane przez R. Liu [2014], X. Guo, J. Miao i E. Morelleca [2005] oraz L.R. Sotomayor i A. Cadenillasa [2013]. Problem ten dla czasu dyskretnego został rozwiązany przez Yin i Zhou [2004].

Celem pracy jest wyznaczenie optymalnej strategii inwestycyjnej na zupełnym rynku finansowym Blacka-Scholesa-Mertona typu Lévy'ego bez arbitrażu. W modelu tym zakładamy, że stopa zwrotu oraz zmienność cen aktywów finansowych zależy od łańcucha Markowa. Ponadto cena akcji modelowana jest za pomocą procesu Levy'ego. Rynek pierwotny rozszerzony jest o skokowe instrumenty finansowe oraz aktywa potęgowo-skokowe, tak aby był zupełny.

Do wyznaczenia optymalnej strategii inwestycyjnej wykorzystano metody programowania dynamicznego (zob. [Oksendal, Sulem, 2004; Fleming, Soner, 1993; Pham, 2008]). W naszym przypadku optymalna strategia to taka, która maksymalizuje wartość oczekiwaną użyteczności procesu bogacenia na końcu okresu. Metoda programowania dynamicznego opiera się na pewnym nieliniowym równaniu różniczkowym cząstkowym drugiego rzędu, nazywanym równaniem Hamiltona-Jacobiego-Bellmana. Aby wyznaczyć strategię optymalną, należy rozwiązać to równanie oraz udowodnić, że rozwiązanie jest jedyne. Analiza zostanie przeprowadzona dla logarytmicznej i potęgowej funkcji użyteczności.

Artykuł składa się z pięciu rozdziałów. W rozdziale drugim zaprezentowany jest pierwotny model rynku finansowego, zaś w trzecim rynek ten zostaje rozszerzony poprzez dodanie skokowych instrumentów finansowych oraz aktywów potęgowo-skokowych. W tym rozdziale pokazano również, że tak uzupełniony model rynku jest zupełny i bez arbitrażu. W rozdziale czwartym wyznaczono optymalną strategię inwestycyjną dla logarytmicznej i potęgowej funkcji użyteczności, natomiast rozdział piąty zawiera podsumowanie całego opracowania.

2. Model

Załóżmy, że $\left(\Omega, F, F_t, P\right)$ jest zupełną przestrzenią probabilistyczną z filtracją. Niech $T := [0;T]$, gdzie $0 < T < \infty$ jest ustalony i oznacza termin zapadalności dla wszystkich rodzajów papierów wartościowych. Rozważmy obserwowalny łańcuch Markowa J ze skończoną, kanoniczną przestrzenią stanów $E := \{e_1, e_2, ..., e_N\}$ (por. [Elliott, Aggoun, Moore, 2004]). Łańcuchy Markowa to procesy stochastyczne z czasem dyskretnym, w których prawdopodobieństwo każdego zdarzenia zależy jedynie od zdarzenia poprzedniego. Są one matematycznym pojęciem służącym do opisu losowych zmian zachodzących w jakimś obiekcie. Stany łańcucha Markowa możemy utożsamiać ze stanami gospodarki.

Dla łańcucha Markowa J zdefiniujmy jego macierz intensywności przejścia $\boldsymbol{\Lambda} = [\lambda_{ij}]_{i,j=1,2,...,N}$ następująco: elementy tej macierzy $\lambda_{ij}(t)$ są stałymi intensywnościami przejścia łańcucha Markowa J ze stanu e_i do stanu e_j w czasie $t \in T$. Zakładamy, że $\lambda_{ij} > 0$ dla $i \neq j$.

Rozważmy klasyczny model rynku finansowego, na którym są dwa podstawowe instrumenty finansowe:

2.1. Rachunek bankowy

Zakładamy, że stopa procentowa r modelowana jest przez łańcuch Markowa J następująco:

$$r(t) := \langle r, J(t) \rangle = \sum_{i=1}^{N} r_i \langle e_i, J(t) \rangle,$$

gdzie $r := (r_1, r_2, ..., r_N)' \in R_+^N$ oraz $\langle \cdot,\cdot \rangle$ jest iloczynem skalarnym w R^N. Współrzędna r_i (i = 1,…,N) odzwierciedla wartość stopy procentowej na rachunku bankowym, gdy łańcuch Markowa jest w i-tym stanie. Zatem dynamika procesu wartości jednostki pieniężnej jest zadana równaniem:

$$dB(t) = r(t)B(t)dt. \tag{1}$$

Ponadto będziemy zakładać, że $B(0) = 1$. Rachunek bankowy może być utożsamiany z instrumentem finansowym wolnym od ryzyka.

2.2. Akcje

Na początku zdefiniujmy proces Itô-Lévy'ego, który zostanie wykorzystany do opisu dynamiki cen akcji. Niech:

$$\gamma(t,x):=\langle \boldsymbol{\gamma}(x),J(t)\rangle=\sum_{i=1}^{N}\gamma_i(x)\langle e_i,J(t)\rangle,$$

gdzie $\boldsymbol{\gamma}(x):=(\gamma_1(x),\gamma_2(x),...,\gamma_N(x))$ jest wektorem wartości funkcji.

Proces X nazywamy procesem Itô-Lévy'ego jeśli ma następującą dekompozycję (zob. [Oksendal, Sulem, 2004]):

$$X(t)=X(0)+\int_0^t\mu_0(s)ds+\int_0^t\sigma_0(s-)dW(s)+\int_0^t\int_R\gamma(s,x)\bar{N}(ds,dx),$$

gdzie W oznacza standardowy ruch Browna niezależny od J, natomiast $\bar{N}(dt,dx)=N(dt,dx)-$ $-\nu(dx)dt$ jest skompensowaną miarą Poissona, która jest niezależna od J i W. Dodatkowo załóżmy, że $E\left[\int_0^T\int_R\gamma^2(t,x)\nu(dx)dt\right]<\infty$. Wtedy proces $\int_R\gamma(t,x)\bar{N}(dt,dx)$ dla $0\le t\le T$ jest martyngałem (zob. [Oksendal, Sulem, 2004]).

Oznaczmy przez $\bar{X}$ część martyngałową procesu X, mianowicie

$$\bar{X}(t)=\int_0^t\sigma_0(s-)dW(s)+\int_0^t\int_R\gamma(s,x)\bar{N}(ds,dx).$$

Przy tych oznaczeniach zakładamy, że dynamika cen akcji S_0 zadana jest przez Markowsko modelowany proces Itô-Lévyego następująco:

$$\begin{cases} dS_0(t)=S_0(t-)\left(\mu_0(t)dt+\sigma_0(t-)dW(t)+\int_R\gamma(t,x)\bar{N}(dt,dx)\right), \\ S_0(0)>0, \end{cases} \tag{2}$$

gdzie μ_0 jest stopą zwrotu z akcji i σ_0 jest zmiennością ceny akcji modelowaną przez łańcuch Markowa J następująco:

$$\mu_0(t):=\langle \boldsymbol{\mu}_0,J(t)\rangle=\sum_{i=1}^{N}\mu_0^i\langle e_i,J(t)\rangle,$$

$$\sigma_0(t):=\langle \boldsymbol{\sigma}_0,J(t)\rangle=\sum_{i=1}^{N}\sigma_0^i\langle e_i,J(t)\rangle,$$

gdzie $\boldsymbol{\mu}_0:=(\mu_0^1,\mu_0^2,...,\mu_0^N)'\in R^N$, $\boldsymbol{\sigma}_0:=(\sigma_0^1,\sigma_0^2,...,\sigma_0^N)'\in R^N$ i $\sigma_0^i>0$ dla każdego $i=1,2,...,N$. Współrzędne wektorów μ_0^i i σ_0^i oznaczają stopę zwrotu i zmienność ceny akcji, gdy łańcuch

Markowa jest w stanie e_i. Załóżmy, że $\mu_0^i > r_i$ dla każdego $i = 1,2,...,N$. Warunek ten pozwala uniknąć możliwości arbitrażu na rynku.

3. Rozszerzenie Markowsko modelowanego rynku Blacka-Scholesa-Mertona typu Lévy'ego

W tym rozdziale do rynku pierwotnego, złożonego z akcji i aktywu bez ryzyka, dodajemy inne instrumenty finansowe, tak aby rozszerzony rynek był zupełny. Mówimy, że rynek jest zupełny, jeżeli każda wypłata jest replikowalna przez instrumenty finansowe w portfelu. W przeciwnym wypadku mówimy, że rynek jest niezupełny.

Na początku, wprowadźmy reprezentację łańcucha Markowa *J* jako proces punktowy Φ_j dla $j = 1,2,...,N$. Niech T_n $(n = 1,2,...)$ oznacza okres (do 1., 2.,…) skoku łańcucha Markowa *J*, gdzie $0 \le T_1 \le T_2 \le ....$ Wtedy proces

$$\Phi_j(t) := \Phi\left(\left[0,t\right]e_j\right) = \sum_{n\ge1} 1_{\left\{J(T_n)=e_j, T_n \le t\right\}}$$

nazywamy zliczającym procesem skokowym. Proces Φ_j opisuje, ile razy łańcuch Markowa był w stanie e_j do czasu *t*. Zdefiniujmy funkcję φ_j jako:

$$\varphi_j(t) := \int_0^t \lambda_j(s)ds,$$

gdzie

$$\lambda_j(t) := \sum_{i\ne j} 1_{\left\{J(t-)=e_j\right\}} \lambda_{ij}. \tag{3}$$

Funkcja φ_j jest nazywana kompensatorem *j*-tego procesu skokowego Φ_j. Wtedy proces

$$\bar{\Phi}_j(t) := \Phi_j(t) - \varphi_j(t)$$

jest martyngałem i nazywamy go *j*-tym martyngałem skokowym (por. [Palmowski, Stettner, Sulima, 2018]).

Zdefiniujmy procesy cen skokowych instrumentów finansowych, których dynamika opisana jest za pomocą martyngałów skokowych.

Niech S_j będzie procesem ceny *j*-tego skokowego instrumentu finansowego, którego dynamika zadana jest w następujący sposób:

$$\begin{cases} dS_j(t) = S_j(t-)\left[\mu_j(t)dt + \sigma_j(t-)d\bar{\Phi}_j(t)\right], \\ S_j(0) > 0, \end{cases} \tag{4}$$

gdzie μ_j jest stopą zwrotu, a σ_j zmiennością ceny pewnego instrumentu finansowego. Zakładamy, że współczynniki te są modelowane przez łańcuch Markowa następująco:

$$\mu_j(t) = \langle \boldsymbol{\mu}_j, J(t) \rangle = \sum_{i=1}^{N} \mu_j^i \langle e_i, J(t) \rangle,$$

$$\sigma_j(t) = \langle \boldsymbol{\sigma}_j, J(t) \rangle = \sum_{i=1}^{N} \sigma_j^i \langle e_i, J(t) \rangle,$$

gdzie $\boldsymbol{\mu}_j := (\mu_j^1, \mu_j^2, ..., \mu_j^N)' \in R^N$ oraz $\boldsymbol{\sigma}_j := (\sigma_j^1, \sigma_j^2, ..., \sigma_j^N)' \in R^N$. Współrzędne μ_j^i oraz σ_j^i oznaczają stopę zwrotu oraz zmienność ceny instrumentu finansowego, gdy gospodarka znajduje się w i-tym stanie łańcucha Markowa. Zakładamy także, że

$$\mu_j^i \geq r_i, \quad i = 1, 2, ..., N.$$

Jest to wymagane, aby uniknąć możliwości arbitrażu na rynku.

Ponadto rozszerzamy rynek papierami wartościowymi, które po raz pierwszy zostały zaprezentowane w pracy Corcuera, Nualarta i Schoutensa [2003], a mianowicie tzw. instrumentami potęgowo skokowymi. Najpierw wprowadzamy proces $X^{(k)}$, zdefiniowany jako:

$$X^{(k)}(t) = \sum_{0 < s \leq t} (\Delta X(s))^k, \quad k \geq 2,$$

gdzie $\Delta X(s) = X(s) - X(s-)$. Dla $k = 1$ bierzemy $X^{(1)}(s) = \bar{X}(s)$. Proces $X^{(k)}$ nazywamy k-tym procesem potęgowo skokowym. Zauważmy, że $X^{(k)}$ jest procesem Lévy'ego-Itô oraz że procesy te skaczą w tych samych punktach, co pierwotny proces Lévy'ego-Itô, ale wielkości skoku są k-tymi potęgami wielkości skoku pierwotnego procesu Lévy'ego-Itô. Dla $k \geq 1$, mamy że:

$$EX^{(k)}(t) = E\left(\sum_{0 < s \leq t} (\Delta X(s))^k \right) = \int_0^t \int_R \gamma^k(s, x) \nu(dx) ds < \infty,$$

a zatem procesy

$$\bar{X}^{(k)}(t) = X^{(k)}(t) - \int_0^t \int_R \gamma^k(s, x) \nu(dx) ds, \quad k \geq 1$$

są martyngałami i nazywamy je martyngałami Teugelsa rzędu k.

Następnie uzupełniamy rynek zbiorem k-tych aktywów potęgowo-skokowych.

Zdefiniujmy więc nowe procesy cenowe $S^{(k)}$ następująco (dla $k \geq 1$):

$$\begin{cases} dS^{(k)}(t) = S^{(k)}(t-)\left[r(t) dt + \sigma^{(k)}(t-) d\bar{X}^{(k)} \right] \\ S^{(k)}(0) > 0. \end{cases} \quad (5)$$

Współczynniki występujące w powyższym wzorze są modelowane w podobny sposób jak dla S_j, a mianowicie,

$$\sigma^{(k)}(t):=\left\langle \boldsymbol{\sigma}^{(k)},J(t)\right\rangle=\sum_{j=1}^{N}\sigma_j^{(k)}\left\langle e_j,J(t)\right\rangle,$$

gdzie $\boldsymbol{\sigma}^{(k)}:=(\sigma_1^{(k)},\sigma_2^{(k)},...,\sigma_N^{(k)})' \in R^N$ dla $k \geq 1$.

Zestawiając równania (1), (2), (4) oraz (5) Markowsko modelowany rynek Blacka-Scholesa-Mertona typu Lévyego składa się z następujących instrumentów finansowych:

$$\begin{cases} dB(t)=r(t)B(t)dt, \\ dS_0(t)=S_0(t-)\left(\mu_0(t)dt+\sigma_0(t-)dW(t)+\int_R \gamma(t,x)\bar{N}(dt,dx)\right), \\ dS_j(t)=S_j(t-)\left[\mu_j(t)dt+\sigma_j(t-)d\bar{\Phi}_j(t)\right], \\ dS^{(k)}(t)=S^{(k)}(t-)\left[r(t)dt+\sigma^{(k)}(t-)d\bar{X}^{(k)}(t)\right], \end{cases}$$

gdzie $j = 1,\ldots, N$, $k \geq 1$. Taki rynek jest zupełny (zob. [Sulima 2018]).

J.M. Corcuera, D. Nualart i W. Schoutens [2005] pokazują, jak interpretować obrót sztucznymi papierami wartościowymi. Proces potegowo skokowy stopnia drugiego jest związany z kontraktami realizującymi wariancję (zob. [Barndorff-Nielsen, Shephard, 2003; 2004]). Kontrakty te są notowane na rynkach pozagiełdowych i są przedmiotem regularnych transakcji. Proces potęgowo skokowy stopnia trzeciego mierzy asymetrię, a stopnia czwartego mierzy kurtozę. Ponadto aktywa potęgowo skokowe stopnia większego niż cztery są utożsamiane z ubezpieczeniami przeciwko zdarzeniom ekstremalnym.

Aby model rynku finansowego można było zaakceptować z ekonomicznego punktu widzenia, powinien on spełniać pewne kryteria. Na przykład, model byłby niedopuszczalny, jeżeli inwestor miałby w nim możliwość osiągnięcia dodatkowego zysku bez ryzyka straty pieniędzy, ani nawet bez ryzyka osiągnięcia zerowego zysku. Taka sytuacja jest możliwa, gdy w modelu istnieje możliwość arbitrażu.

Pokażemy teraz, że na rozważanym tutaj rynku nie ma możliwości arbitrażu. Podstawowe twierdzenie matematyki finansowej mówi, że istnienie równoważnej do P miary martyngałowej gwarantuje brak arbitrażu na rynku (zob. [Harrison, Pliska, 1981; Jakubowski et al., 2003]).

Twierdzenie 1. [Sulima 2018] *Niech Q będzie miarą prawdopodobieństwa na* $\left(\Omega,F,F_t,P\right)$ *taką, że*

$$L(t)=\frac{dQ}{dP}\Big|F_t.$$

Wtedy L, zdefiniowane nastepującym wzorem:

$$L(t)=\exp\left(\int_0^t \psi_0(s)dW(s)-\frac{1}{2}\int_0^t \psi_0^2(s)ds-\sum_{j=1}^{N}\int_0^t \psi_j(s)\varphi_j(ds)\right)\times\prod_{J(t-)\neq J(t)}\left(1+\psi_j(t)\right),$$

jest procesem gęstości nowej miary martyngałowej Q. Załóżmy, że $\mu_j^j = r_j$ *dla wszystkich* $j=0,1,\ldots,N$ *oraz* ψ_j $(j=0,1,\ldots,N)$ *wyrażone są wzorami*

$$\begin{cases} \psi_0(t) = \dfrac{r(t-)-\mu_0(t-)}{\sigma_0(t-)}, \\ \psi_j(t) = \dfrac{r(t-)-\mu_j(t-)}{\sigma_j(t-)\lambda_j(t)}. \end{cases}$$

Wtedy zdyskontowane procesy cen papierów wartościowych są martyngałami względem nowej miary Q i rynek ten jest bez arbitrażu.

Zauważmy, że możliwość arbitrażu to pozbawiona ryzyka możliwość zdobycia pieniędzy, inwestor nie wykłada żadnych pieniędzy, wie, że na pewno nie straci, a w niektórych sytuacjach może zyskać. Gdyby taka możliwość istniała, wszyscy staraliby się zastosować tę strategię, co wpłynęłoby na cenę papierów wartościowych. Model ekonomiczny nie opisywałby równowagi.

Instrument finansowy jest osiągalny, jeżeli istnieje strategia inwestycyjna, która replikuje ten instrument. Zasada wyceny martyngałowej, mówi o tym, że jeżeli w modelu nie ma możliwości arbitrażu, to wartość instrumentu osiągalnego X w chwili początkowej wynosi $E_Q(X/B)$, gdzie Q jest dowolną miarą martyngałową.

4. Optymalna strategia inwestycyjna na rynku Blacka-Scholesa-Mertona typu Lévy'ego

W tym rozdziale rozważymy problem wyboru strategii inwestycyjnej, która najlepiej przekształci pewien zasób pieniędzy w chwili początkowej w zasób pieniędzy w chwili końcowej.

Zadanie polega na wyznaczeniu optymalnej strategii inwestycyjnej, a do tego potrzebna jest miara umożliwiająca porównywanie ze sobą strategii. Do porównywania strategii zastosujemy kryterium oczekiwanej użyteczności majątku końcowego.

W tym rozdziale zatem wyznaczymy optymalną strategię inwestycyjną na zupełnym rynku Blacka-Scholesa-Mertona typu Lévy'ego, gdy inwestor posiada logarytmiczną lub potęgową funkcję użyteczności. W przypadku logarytmicznej funkcji użyteczności zastosujemy metody bezpośredniego różniczkowania, natomiast w przypadku potęgowej funkcji użyteczności wykorzystamy metody programowania dynamicznego (zob. [Oksendal, Sulem, 2004]).

Wybór takich funkcji użyteczności został zdeterminowany faktem, iż w tych dwóch przypadkach możemy wyliczyć strategie optymalne *explicite*. Zauważmy, że te funkcje użyteczności opisują inwestora z awersją do ryzyka i są one często stosowane w teorii optymalizacji np. [Zhang, Siu, Meng, 2010]. Opisany wyżej model rynku jest uogólnieniem modelu w pracy X. Zhanga, T.K. Siu i Q. Menga [2010], który wprawdzie jest modelem przełącznikowym, ale dynamika cen opisana jest tylko za pomocą ruchu Browna, bez żadnych skoków. Dzięki temu możemy porównać otrzymane wyniki.

Dla przypomnienia, na naszym rynku finansowym procesy cen wszystkich instrumentów finansowych spełniają następujące równania:

$$dB(t)=r(t)B(t)dt,$$

$$dS_0(t)=S_0(t-)\left(\mu_0(t)dt+\sigma_0(t-)dW(t)+\int_R\gamma(t,x)\bar{N}(dt,dx)\right),$$

$$dS_j(t)=S_j(t-)\left[\mu_j(t)dt+\sigma_j(t-)d\bar{\Phi}_j(t)\right],$$

$$dS^{(k)}(t)=S^{(k)}(t-)\left[r(t)dt+\sigma^{(k)}(t-)d\bar{X}^{(k)}(t)\right],$$

gdzie $j=1,...,N$, $k\geq 1$.

Ostatnie równanie możemy zapisać jako:

$$dS^{(k)}(t)=S^{(k)}(t-)\left(r(t)dt+\sigma^{(k)}(t-)\int_R\gamma^k(t,x)\bar{N}(dt,dx)\right).$$

Rozważmy gracza, który inwestuje swój majątek w aktywa finansowe w naszym rozszerzonym rynku, w celu maksymalizacji oczekiwanej użyteczności wypłaty na końcu okresu. Oznaczamy przez π_0 część majątku zainwestowaną w akcje w czasie t, natomiast przez π_j, $j=1,2,\ldots,N$ oznaczamy część majątku zainwestowaną w j-te skokowe instrumenty finansowe. Z kolei $\pi^{(k)}$, $k\geq 1$ jest częścią majątku zainwestowaną w aktywa finansowe $S^{(k)}$. Wtedy proces bogacenia, oznaczony przez R^π, spełnia następujące stochastyczne równanie różniczkowe:

$$\begin{aligned}\frac{dR^\pi(t)}{R^\pi(t-)}&=\pi_0(t)\left(\mu_0(t-)dt+\sigma_0(t-)dW(t)+\int_{\mathrm{R}}\gamma(t,x)\bar{N}(dt,dx)\right)\\&+\sum_{j=1}^{N}\pi_j(t)\left(\mu_j(t-)dt+\sigma_j(t-)d\bar{\Phi}_j(t)\right)\\&+\sum_{k=1}^{\infty}\pi^{(k)}(t)\left(r(t)dt+\sigma^{(k)}(t-)\int_{\mathrm{R}}\gamma^k(t,x)\bar{N}(dt,dx)\right)+\left(1-\sum_{j=0}^{N}\pi_j(t)-\sum_{k=1}^{\infty}\pi^{(k)}(t)\right)r(t)dt\\&=\left(r(t)+\sum_{j=0}^{N}\pi_j(t)\left(\mu_j(t-)-r(t)\right)\right)dt+\pi_0(t)\sigma_0(t-)dW(t)+\sum_{j=1}^{N}\pi_j(t)\sigma_j(t-)d\bar{\Phi}_j(t)\\&+\int_{\mathrm{R}}\left(\pi_0(t)\gamma(t,x)+\sum_{k=1}^{\infty}\pi^{(k)}(t)\sigma^{(k)}(t-)\gamma^k(t,x)\right)\bar{N}(dt,dx).\end{aligned}$$

Rozwiązanie R^π powyższego równania stochastycznego ma postać:

$$R^\pi(T)=R^\pi(t)\exp(\int_t^T\left(r(s)+\sum_{j=0}^{N}\pi_j(s)\left(\mu_j(s-)-r(s)\right)-\frac{1}{2}\pi_0^2(s)\sigma_0^2(s-)\right)ds \tag{6}$$

$$+\int_t^T \pi_0(s)\sigma_0(s-)dW(s)+\int_t^T\sum_{j=1}^N\Big(\log\big(1+\pi_j(s)\sigma_j(s-)\big)-\pi_j(s)\sigma_j(s-)\Big)\lambda_j(s)ds$$

$$+\int_t^T\sum_{j=1}^N\log\big(1+\pi_j(s)\sigma_j(s-)\big)d\bar{\Phi}_j(s)+\int_t^T\int_{\mathrm{R}}\log(1+\pi_0(s)\gamma(s,x)$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\pi^{(k)}(s)\sigma^{(k)}(s-)\gamma^k(s,x))\bar{N}(ds,dx)+\int_t^T\int_{\mathrm{R}}(\log(1+\pi_0(s)\gamma(s,x)$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\pi^{(k)}(s)\sigma^{(k)}(s-)\gamma^k(s,x))-\pi_0(s)\gamma(s,x)-\sum_{k=1}^{\infty}\pi^{(k)}(s)\sigma^{(k)}(s-)\gamma^k(s,x))\nu(dx)ds.$$

Niech $U:R^+\to R$ oznacza funkcję użyteczności inwestora, która jest ściśle rosnąca, ściśle wklęsła i dwukrotnie różniczkowalna, taka że, pierwsza pochodna $U'(\cdot)>0$ i druga pochodna $U''<0$. Dla każdego $(t,z)\in TR^+$ oraz $i=1,2,...,N$, definiujemy:

$$V^{\pi}(t,z,e_i):=E_{t,z,i}\Big[U\big(R^{\pi}(T)\big)\Big],$$

gdzie $E_{t,z,i}$ jest warunkową wartością oczekiwaną względem $R^{\pi}(t)=z$ oraz $J(t)=e_i$.

Zakładamy, że dla każdego $\pi\in A$, $(t,z)\in TR^+$ oraz $i=1,2,...,N$,

$$E_{t,z,i}\Big[U\big(R^{\pi}(T)\big)\Big]<\infty.$$

Wtedy funkcja wartości portfela inwestora wyrażona jest wzorem:

$$V(t,z,e_i)=\sup_{\pi\in \mathrm{A}}V^{\pi}(t,z,e_i),$$

gdzie A jest zbiorem strategii dopuszczalnych.

Rozważmy teraz dwa rodzaje funkcji użyteczności: logarytmiczną i potęgową.

4.1. Optymalna strategia inwestycyjna dla logarytmicznej funkcji użyteczności

W tym podrozdziale znajdziemy optymalną strategię inwestycyjną dla logarytmicznej funkcji użyteczności procesu bogacenia, a mianowicie:

$$U(z)=log(z).$$

Z równania (6) mamy, że:

$$\log R^{\pi}(T)=\log R^{\pi}(t)+\int_t^T\left(r(s)+\sum_{j=0}^N\pi_j(s)\big(\mu_j(s-)-r(s)\big)-\frac{1}{2}\pi_0^2(s)\sigma_0^2(s-)\right)ds$$

$$+\int_t^T \pi_0(s)\sigma_0(s-)dW(s)+\int_t^T\sum_{j=1}^N\Big(\log\big(1+\pi_j(s)\sigma_j(s-)\big)-\pi_j(s)\sigma_j(s-)\Big)\lambda_j(s)ds$$

$$+\int_t^T\sum_{j=1}^N \log\big(1+\pi_j(s)\sigma_j(s-)\big)d\bar{\Phi}_j(s)$$

$$+\int_t^T\int_{\mathrm{R}}\log\left(1+\pi_0(s)\gamma(s,x)+\sum_{k=1}^{\infty}\pi^{(k)}(s)\sigma^{(k)}(s-)\gamma^k(s,x)\right)\bar{N}(ds,dx)$$

$$+\int_t^T\int_{\mathrm{R}}(\log\left(1+\pi_0(s)\gamma(s,x)+\sum_{k=1}^{\infty}\pi^{(k)}(s)\sigma^{(k)}(s-)\gamma^k(s,x)\right)-\pi_0(s)\gamma(s,x)-\pi_0(s)\gamma(s,x)$$

$$-\sum_{k=1}^{\infty}\pi^{(k)}(s)\sigma^{(k)}(s-)\gamma^k(s,x))\nu(dx)ds$$

i wartość oczekiwana powyższego wyrażenia wynosi:

$$E_{t,z,i}\left[\log R^{\pi}(T)\right]=\log R^{\pi}(t)+E_{t,z,i}\int_t^T[r(s)+\sum_{j=0}^N\pi_j(s)\big(\mu_j(s-)-r(s)\big)$$

$$-\frac{1}{2}\pi_0^2(s)\sigma_0^2(s-)+\sum_{j=1}^N\Big(\log\big(1+\pi_j(s)\sigma_j(s-)\big)-\pi_j(s)\sigma_j(s-)\Big)\lambda_j(s)$$

$$+\int_{\mathrm{R}}(\log\left(1+\pi_0(s)\gamma(s,x)+\sum_{k=1}^{\infty}\pi^{(k)}(s)\sigma^{(k)}(s-)\gamma^k(s,x)\right)-\pi_0(s)\gamma(s,x)$$

$$-\sum_{k=1}^{\infty}\pi^{(k)}(s)\sigma^{(k)}(s-)\gamma^k(s,x))\nu(dx)]ds.$$

Powyższe równanie wynika z faktu, że wartość oczekiwana z martyngału wynosi zero. W związku z tym, optymalna funkcja wartości $V\big(t,z,e_i\big)$ może być zapisana jako:.

$$V\big(t,z,e_i\big)=\log(z)+\sup_{\pi\in\mathrm{A}}h^{\pi}\big(t,e_i\big),$$

gdzie

$$h^{\pi}\big(s,e_i\big)=E_{t,z,i}\int_t^T F\big(\pi_0(s),\pi_1(s),\ldots,\pi_N(s),\pi^{(i)}(s),\ldots\big)ds$$

$$=E_{t,z,i}\int_t^T[r(s)+\sum_{j=0}^N\pi_j(s)\big(\mu_j(s-)-r(s)\big)-\frac{1}{2}\pi_0^2(s)\sigma_0^2(s-)$$

$$+\sum_{j=1}^N\Big(\log\big(1+\pi_j(s)\sigma_j(s-)\big)-\pi_j(s)\sigma_j(s-)\Big)\lambda_j(s)+\int_{\mathrm{R}}(\log(1+\pi_0(s)\gamma(s,x)$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\pi^{(k)}(s)\sigma^{(k)}(s-)\gamma^k(s,x))-\pi_0(s)\gamma(s,x)-\sum_{k=1}^{\infty}\pi^{(k)}(s)\sigma^{(k)}(s-)\gamma^k(s,x))\nu(dx)]ds.$$

W celu wyznaczenia optymalnej strategii inwestycyjnej wystarczające jest, aby zmaksymalizować funkcję $F\left(\pi_0(s),\pi_1(s),...,\pi_N(s),\pi^{(1)}(s),\pi^{(2)}(s)...\right)$ dla wszystkich $s\in[t,T]$. Zatem przez bezpośrednie różniczkowanie względem $\pi_0(s),\pi_1(s),...,\pi_N(s),\pi^{(1)}(s),\pi^{(2)}(s)...$ otrzymujemy optymalną strategię inwestycyjną:

$$\pi_0^*(s)=\frac{\mu_0(s-)-r(s)}{\sigma_0^2(s-)},$$
$$\pi_j^*(s)=\frac{\mu_j(s-)-r(s)}{\left(r(s)-\mu_j(s-)\right)\sigma_j(s-)+\lambda_j(s)\sigma_j^2(s-)}, \tag{7}$$
$$\pi^{(1)*}(s)=\frac{r(s)-\mu_0(s-)}{\sigma_0^2(s-)\sigma^{(1)}(s-)},$$
$$\pi^{*(k)}=0,$$

dla j = 1,…,N, k > 1.

Z pracy Kramkova i Schachermayera [1999] wynika, że strategia ta jest jedyna.

4.2. Optymalne strategie inwestycyjne dla potęgowej funkcji użyteczności

W tym podrozdziale znajdziemy optymalną strategię inwestycyjną dla potęgowej funkcji użyteczności, a mianowicie:

$$U(z)=z^{\alpha} \text{ dla } \alpha\in(0,1).$$

W tym przypadku wykorzystamy metodę programowania dynamicznego do rozwiązania problemu wyboru optymalnego portfela (zob. [Oksendal, Sulem, 2004; Fleming, Soner, 1993; Pham 2008]). Metoda ta polega na rozwiązaniu równania Hamiltona-Jacobiego-Bellmana.

Załóżmy, że funkcja v jest dwukrotnie różniczkowalna. Wtedy równanie Hamiltona-Jacobiego-Bellmana ma postać:

$$\sup_{\pi\in A} A^{\pi}v\left(t,z,e_i\right)=0 \tag{8}$$

dla $i=1,2,...N$, $\left(t,z,e_i\right)\in T\times R^{+}\times E$ z warunkiem końcowym

$$v\left(T,z,e_i\right)=z^{\alpha},$$

gdzie

$$A^{\pi}v\left(t,z,e_i\right)=v_t\left(t,z,e_i\right)+\left(r_i+\sum_{j=0}^{N}\pi_j\left(\mu_j^i-r_i\right)\right)zv_z\left(t,z,e_i\right)+\frac{1}{2}\pi_0^2(\sigma_0^i)^2z^2v_{zz}\left(t,z,e_i\right)$$

$$+\sum_{j=1}^{N}\left(v\left(t,z\left(1+\pi_j\sigma_j^i\right),e_i\right)-v\left(t,z,e_i\right)-v_z\left(t,z,e_i\right)z\pi_j\sigma_j^i\right)\lambda_{ij}+\int_{R}(v(t,z(1+\pi_0\gamma_i(x)$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\pi^{(k)}\sigma_i^{(k)}\gamma_i^k(x)),e_i)-v\left(t,z,e_i\right)-v_z\left(t,z,e_i\right)z\left(\pi_0\gamma_i(x)+\sum_{k=1}^{\infty}\pi^{(k)}\sigma_i^{(k)}\gamma_i^k(x)\right))v(dx)$$

$$+\sum_{j=1}^{N}\lambda_{ij}v\left(t,z,e_i\right).$$

Rozpatrzmy teraz rozwiązania powyższego układu równań Hamiltona-Jacobiego-Bellmana w postaci:

$$v\left(t,z,e_i\right)=z^{\alpha}\varphi\left(t,e_i\right), \tag{9}$$

gdzie funkcja φ spełnia warunek końcowy:

$$\varphi\left(T,e_i\right)=1.$$

Ze wzoru (9) mamy:

$$\begin{aligned} v_t\left(t,z,e_i\right)&=z^{\alpha}\varphi_t\left(t,e_i\right),\\ v_z\left(t,z,e_i\right)&=\alpha z^{\alpha-1}\varphi\left(t,e_i\right),\\ v_{zz}\left(t,z,e_i\right)&=\alpha(\alpha-1)z^{\alpha-2}\varphi\left(t,e_i\right). \end{aligned} \tag{10}$$

Wstawiając równania (10) do układu równań Hamiltona-Jacobiego-Bellmana (8), dostajemy:

$$z^{\alpha}\phi_t\left(t,e_i\right)+\sup_{\pi\in A}\{\left(r_i+\sum_{j=0}^{N}\pi_j\left(\mu_j^i-r_i\right)\right)\alpha z^{\alpha}\phi\left(t,e_i\right)+\frac{1}{2}\pi_0^2(\sigma_0^i)^2\alpha(\alpha-1)z^{\alpha}\phi\left(t,e_i\right)$$

$$+\sum_{j=1}^{N}(z^{\alpha}\left(1+\pi_j\sigma_j^i\right)^{\alpha}\phi\left(t,e_i\right)-z^{\alpha}\phi\left(t,e_i\right)-\alpha z^{\alpha}\phi\left(t,e_i\right)\pi_j\sigma_j^i\right)\lambda_{ij}$$

$$+\int_{R}(z^{\alpha}(1+\pi_0\gamma_i(x)+\sum_{k=1}^{\infty}\pi^{(k)}\sigma_i^{(k)}\gamma_i^k(x))^{\alpha}\phi\left(t,e_i\right)-z^{\alpha}\phi\left(t,e_i\right)-\alpha z^{\alpha}\phi\left(t,e_i\right)(\pi_0\gamma_i(x)$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\pi^{(k)}\sigma_i^{(k)}\gamma_i^k(x)))v(dx)\}+\sum_{j=1}^{N}\lambda_{ij}z^{\alpha}\phi\left(t,e_i\right)=0.$$

Dzieląc obie strony przez z^{α} otrzymujemy:

$$\phi_t\left(t,e_i\right)+\sup_{\pi\in A}\{\left(r_i+\sum_{j=0}^{N}\pi_j\left(\mu_j^i-r_i\right)\right)\alpha+\frac{1}{2}\pi_0^2(\sigma_0^i)^2\alpha(\alpha-1)$$

$$+\sum_{j=1}^{N}(\left(1+\pi_j\sigma_j^i\right)^{\alpha}-1-\alpha\pi_j\sigma_j^i\right)\lambda_{ij}+\int_{R}((1+\pi_0\gamma_i(x)+\sum_{k=1}^{\infty}\pi^{(k)}\sigma_i^{(k)}\gamma_i^k(x))^{\alpha}$$

$$-1-\alpha\left(\pi_0\gamma_i(x)+\sum_{k=1}^{\infty}\pi^{(k)}\sigma_i^{(k)}\gamma_i^k(x)\right)\nu(dx)\}\phi(t,e_i)+\sum_{j=1}^{N}\lambda_{ij}\phi(t,e_i)=0.$$

Różniczkując funkcję pod supremum, względem $\pi_0(s),\pi_1(s),...,\pi_N(s),\pi^{(k)}(s),...$ kolejno, i przyrównując odpowiednie pochodne do zera otrzymujemy strategię optymalną w postaci:

$$\pi_0^* = \frac{\mu_0^i - r_i}{(\sigma_0^i)^2(1-\alpha)},$$

$$\pi_j^* = \frac{\left(1-\frac{\mu_j^i - r_i}{\lambda_{ij}\sigma_j^i}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}} - 1}{\sigma_j^i}, \tag{11}$$

$$\pi^{*(1)} = -\frac{\mu_0^1 - r_1}{(\sigma_0^1)^2(1-\alpha)\sigma_1^{(1)}},$$

$$\pi^{*(k)} = 0$$

dla j = 1,…,N, k > 2.

Strategia inwestycyjna dana wzorem (11) jest optymalną strategią inwestycyjną dla problemu wyboru portfela z potęgową funkcją użyteczności. Jedyność rozwiązań (11) wynika z pracy D. Kramakova i W. Schachermayera [1999].

Strategie optymalne wyznaczone przez równania (7) oraz (11) określają udział instrumentów finansowych w portfelu inwestycyjnym w wyżej analizowanym modelu rynku.

5. Podsumowanie

W artykule wyznaczyliśmy optymalną strategię inwestycyjną na zupełnym rynku finansowym Blacka-Scholesa-Mertona typu Lévy'ego bez arbitrażu. Strategia ta opisuje, ile jednostek różnych instrumentów finansowych należy nabyć, aby osiągnąć największą oczekiwaną wypłatę na końcu ustalonego okresu. W artykule rozpatrujemy rynek zupełny, w którym możemy stosować martyngałowe metody wyznaczania optymalnego portfela. Na takim rynku po wyznaczeniu optymalnego portfela wiadomo, że istnieje strategia inwestycyjna, która go replikuje.

Przedstawiony problem optymalizacji stochastycznej jest obecnie mocno eksploatowany we współczesnej inżynierii rynków finansowych. Optymalizacja stochastyczna dla procesów Lévy'ego to problem, który rozwija się bardzo szybko ze względu na szerokie zastosowania nie tylko w finansach, lecz także m.in. w informatyce, telekomunikacji i ubezpieczeniach.

Bibliografia

1. Barndorff-Nielsen O.E., Shephard N. [2003], *Realised Power Variation and Stochastic Volatility Models*, „Bernoulli", no. 9, s. 243–265.
2. Barndorff-Nielsen O.E., Shephard N. [2004], *Financial Volatility: Stochastic Volatility and Levy Based Model*, Cambridge University Press, Cambridge.
3. Bauerle N., Rieder U. [2004], *Portfolio Optimization with Markov-modulated Stock Prices and Interest Rates*, Automatic Control, IEEE Transactions on, vol. 49, no. 3, s. 442–447.
4. Black F., Jensen M.C., Scholes M. [1972], *The Capital Asset Pricing Model: Some Empirical Tests*, Studies in the Theory of Capital Markets, red. M.C. Jensen, Praeger, New York, s. 79–121.
5. Black F., Scholes M. [1973], *The Pricing of Options and Corporate Liabilities*, „The Journal of Political Economy", vol. 81, s. 637–659.
6. Elliott R.J., Aggoun L., Moore J.B. [2004], *Hidden Markov Models: Estimation and Control*, Springer-Verlag, Berlin.
7. Corcuera J.M., Nualart D., Schoutens W. [2003], *Completion of a Levy Market By Power-Jump Assets*, „Finance and Stochastics", vol. 9, no. 1, s. 109–127.
8. Fleming W., Hernandez-Hernandez D. [2003], *An Optimal Consumption Model with Stochastic Volatility*, „Finance and Stochastics", vol. 7, no. 2, s. 245–262.
9. Fleming W., Soner M. [1993], *Controlled Markov Processes and Viscosity Solutions*, Springer--Verlag.
10. Fu J., Wei J., Yang H. [2014], *Portfolio Optimization in a Regime-Switching Market with Derivatives*, „European Journal of Operational Research", vol. 233, s. 184–192.
11. Gassiat P., Gozzi F., Pham H. [2014], *Investment/Consumption Problem in Illiquid Markets with Regime-Switching*, „SIAM Journal on Control and Optimization", vol. 52, no. 3, s. 1761–1786.
12. Guo X., Miao J., Morellec E. [2005], *Irreversible Investments with Regime Shift*, „Journal of Economic Theory", vol. 122, s. 37–59.
13. Harrison J.M., Pilska S. [1981], *Martingales and Stochastic Integrals in the Theory of Continuous Trading*, Stochastic Processes and their Applications, vol. 11, s. 215–260.
14. Hull J., White A. [1987], *The Pricing of Options on Assets with Stochastic Volatility*, „Journal of Finance", vol. 42, s. 281–300.
15. Jakubowski J. [2006], *Modelowanie rynków finansowych*, SCRIPT, Warszawa.
16. Jakubowski J., Palczewski A., Rutkowski M., Stettner Ł. [2003], *Matematyka finansowa. Instrumenty pochodne*, WNT, Warszawa.
17. Jang B.G.Y. U., Keun Koo H., Liu H., Loewenstein M. [2007], *Liquidity Premia and Transaction Costs*, „The Journal of Finance", vol. 62, s. 2329–2366.
18. Kramkov D., Schachermayer W. [1999], *The Asymptotic Elasticity of Utility Functions and Optimal Investment in Incomplete Markets*, „Annals of Applied Probability", vol. 9, s. 904–950.
19. Liu R. [2014], *Optimal Investment and Consumption with Proportional Transaction Costs in Regime-Switching Model*, „Journal of Optimization Theory and Applications", vol. 163, s. 614–641.
20. Markowitz H.M. [1952], *Portfolio Selection*, „The Journal of Finance", vol. 7, s. 77–91.

21. Merton R.C. [1973], *The Theory of Rational Option Pricing*, „Bell Journal of Economics and Management Science", vol. 4, s. 141–183.
22. Merton R.C. [1976], *Option Pricing when Underlying Stock Returns are Discontinuous*, „Journal of Financial Economics", vol. 3, s. 125–144.
23. Nagai H., Runggaldier W.J. [2008], *PDE Approach to Utility Maximization for Market Models with Hidden Markov Factors*, w: *Seminar on Stochastic Analysis, Random Fields and Applications V*, red. R.C. Dalang, M. Dozzi, F. Russo, „Progress in Probability", vol. 59, s. 493–506.
24. Naik V. [1993], *Option Valuation and Hedging Strategies with Jumps in the Volatility of Asset Returns*, „The Journal of Finance", vol. 48, s. 1969–1984.
25. Oksendal B., Sulem A. [2007], *Applied Stochastic Control of Jump Diffusions*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg.
26. Palmowski Z., Stettner Ł., Sulima A. [2018], *A Note on Chaotic and Predictable Representations for Itô-Markov Additive Processes*, „Stochastic Analysis and Applications", vol. 36, no. 4, s. 622–638.
27. Pham H. [2009], *Continuous-time Stochastic Control and Optimization with Financial Applications*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
28. Pham H., Quenez M.C. [2001], *Optimal Portfolio in Partially Observed Stochastic Volatility Models*, „The Annals of Applied Probability", vol. 11, no. 1, s. 210–238.
29. Rieder U., Bauerle N. [2005], *Portfolio Optimization with Unobservable Markov-Modulated Drift Process*, „Journal of Applied Probability", vol. 42, s. 362–378.
30. Sass J., Haussmann U.G. [2004], *Optimizing the Terminal Wealth under Partial Information: The Drift Process as a Continuous time Markov chain*, „Finance Stochastics", vol. 8, s. 553–577.
31. Sato K. [1999], *Lévy Processes and Infinitely Divisible Distributions*, „Cambridge Studies in Advanced Mathematics", vol. 68, Cambridge University Press.
32. Schoutens W. [2003], *Lévy Processes in Finance: Pricing Financial Derivatives*, John Wiley and Sons Ltd.
33. Shen Y., Siu T.K. [2012], *Asset Allocation under Stochastic Interest Rate with Regime Switching*, „Economic Modelling", vol. 29, s. 1126–1136.
34. Sotomayor L.R., Cadenillas A. [2013], *Stochastic Impulse Control with Regime Switching for the Optimal Dividend Policy when There Are Business Cycles, Taxes and Fixed Costs*, „Stochastics: An International Journal of Probability and Stochastic Processes", vol. 85, no. 4, s. 707–722.
35. Stockbridge R. [2002], *Portfolio Optimization in Markets Having Stochastic Rates*, w: *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, red. B. Pasik-Duncan, B., „Stochastic Theory and Control", no. 280, s. 447–458.
36. Sulima A. [2018], *Zupełność i brak arbitrażu na Markowsko modelowanym rynku Blacka-Scholesa-Mertona typu Levy'ego*, wysłane do publikacji.
37. Yin G.,Zhou X.Y. [2004], *Markowitz's mean-variance portfolio selection with regime switching: from discrete-timemodels to their continuous-time limits*, „IEEE Transactions on Automatic Control", vol. 49. no. 3, 349–360.
38. Yong J., Zhou X.Y. [2000], *Stochastic Controls, Hamiltonian Systems and HJB Equations*, SpringerVerlag New York.
39. Zhang X., Siu T.K., Meng Q. [2010], *Portfolio selection in the enlarged Markovian regime-switching market*, „SIAM Journal on Control and Optimization", vol. 48, s. 3368–3388.

40. Zhang Q., Yin G. [2004], *Nearly-optimal Asset Allocation in Hybrid Stock Investment Models*, „Journal of Optimalization Theory and Applications", vol. 121, no. 2, 197–222.
41. Zariphopoulou T. [1992], *Investment-Consumption Models with Transaction Fees and Markov-Chain Parameters*, „SIAM Journal on Control and Optimization", vol. 30, no. 3, 613–636.

Lévy-type Black-Scholes-Merton optimal investment strategy in the financial market

Summary

The study was motivated by searches for an optimal Lévy-type investment strategy in a Black-Scholes-Merton complete financial market with no arbitrage. The paper stipulates shares of various financial instruments in an optimal portfolio. Their prices are described using Lévy processes, which are a generalised Wiener process. On top of that, an assumption was made about model indicators, which depend on Markov chains. This is an incomplete market meaning not every payment can be replicated using a certain investment strategy. In order to complete the market, jump financial instruments and power-jump assets have been added. Next, dynamic programming methods were deployed to determine an optimal investment strategy in this market. An optimal strategy is the one which maximises the expected utility of wealth accumulation at the end of a pre-determined period. The analysis was carried out for a logarithmic and power function of utility of the received payment.

Keywords: switching market model, optimal control, arbitrage, market completeness, stochastic integral, Lévy processes